Selbstduale Vertexoperatorsuperalgebren
und
das Babymonster

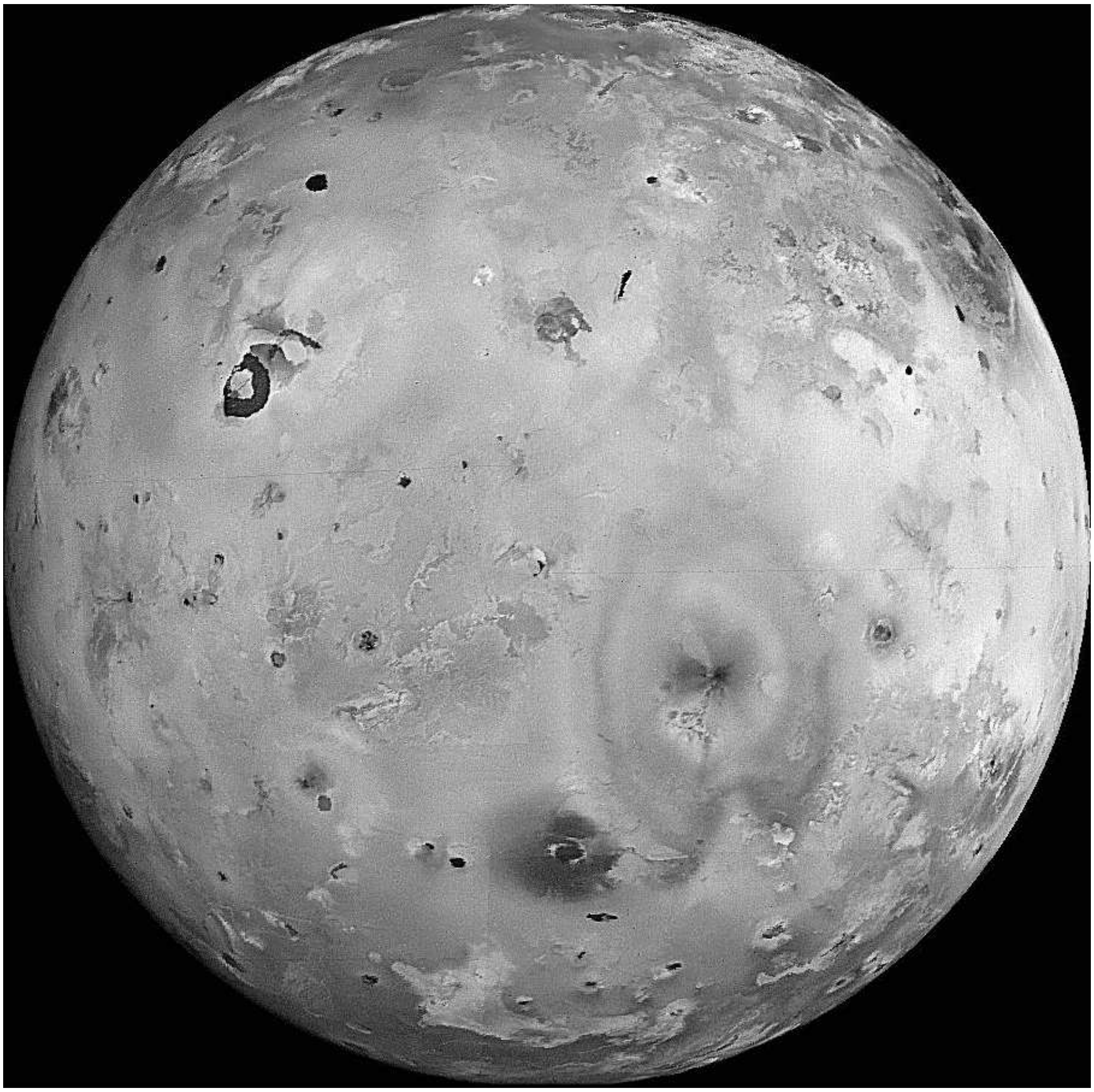
Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn

vorgelegt von

Gerald Höhn

Bonn, Juli 1995

Referent: Prof. Dr. Yuri Manin
Koreferent: Prof. Dr. Friedrich Hirzebruch



Jupiter Mond Io

Die Daten dieses von der Raumsonde Voyager II *aufgenommenen Bildes erreichten nach* etwa 45 *Minuten die Erde. Die Übertragung erfolgte mit Hilfe des binären Golaycodes* g_{24}.

Danksagung

Es ergaben sich aufgrund der vielen Querverbindungen der Theorie der Vertexoperator-Algebren zu anderen Gebieten anregende Diskussionen mit verschiedenen Mathematikern.

Herrn Prof. D. ZAGIER danke ich für einige klärende Diskussionen über Modulfunktionen, die zu einer Vereinfachung zweier Abschnitte führten. Viele Diskussionen mit G. MERSMANN halfen mir oft, meinen Ideen eine klare Gestalt zu geben. Hierfür und die Hilfe beim Beweis eines Lemmas sei ihm gedankt. Herrn W. NEUTSCH verdanke ich mehrere anregende Diskussionen über Idempotente in der Griess Algebra. In der Endphase der Arbeit luden mich J. LEPOWSKY und Y. HUANG nach Rutgers ein, was mir erstmals die Gelegenheit gab über alle Aspekte der Arbeit zu diskutieren. Schließlich halfen mir G. MASON, C. DONG und R. GRIESS einige Unklarheiten zu beseitigen und Argumente zu vervollständigen. Das GAP-TEAM in Aachen half bei einer gruppentheoretischen Charakterrechnung und M. SCHRÖDER unterzog Teile der Arbeit einer kritischen Durchsicht. Ich möchte mich bei allen Genannten für ihre Hilfe sehr bedanken. Herrn Prof. P. SLODOWY danke ich für sein Interesse an der Arbeit und Herrn Prof. Y. MANIN für Vorträge über Vertexoperator-Algebren am MIT und am MPI für Mathematik, die mein Interesse an diesem Gebiet wachgehalten haben.

Mein besonderer Dank gilt Prof. F. HIRZEBRUCH für seine Unterstützung während der Promotion, für die Möglichkeit, am Max-Planck-Institut für Mathematik arbeiten zu können und vor allem für die vielen anregenden Vorlesungen, die meine mathematische Entwicklung wesentlich beeinflußt haben und das Fundament zu dieser Arbeit legten.

Meinen ELTERN sei schließlich für die stets begleitende Unterstützung während meines Studiums gedankt.

Fassung vom 25.3.1996

Contents

Einleitung

Ende der 70-er Jahre wurde ein überraschender und zunächst unerklärlich erscheinender Zusammenhang zwischen Fourierkoeffizienten von Modulfunktionen und Dimensionen irreduzibler Darstellungen der größten sporadischen einfachen Gruppe, dem Monster, gefunden. Eine teilweise Erklärung fand dieses „moonshine" genannte Phänomen Mitte der 80-er Jahre mit Hilfe der Vertexoperator-Algebren. In der vorliegenden Arbeit werden *selbstduale Vertexoperator-Superalgebren* untersucht, dies sind Vertexoperator Superalgebren mit genau einer irreduziblen Darstellung. Die Vertexoperator Superalgebren haben neben der Theorie der Modulfunktionen und endlichen Gruppen Verbindungen zu vielen weiteren Strukturen in Mathematik und Physik, wie affinen Kac-Moody Algebren, elliptischen Geschlechtern, Operaden und konformen Quantenfeldtheorien. Ein Leitgedanke der Arbeit ist die Analogie zwischen *Codes, Gittern und Vertexoperator Algebren*, die auch den folgenden Satz motivierte, eines der Hauptresultate der Arbeit:

Satz: *Es existiert eine Vertexoperator-Superalgebra $VB^\natural$ vom Rang $23\frac{1}{2}$ auf der das Babymonster B — die zweitgrößte sporadische endliche einfache Gruppe — in natürlicher Weise operiert. Sie besitzt den Charakter*

$$\chi_{VB^\natural} = \chi_{1/2}^{47} - 47\,\chi_{1/2}^{23} = q^{-\frac{47}{48}}\,(1 + 4371\,q^{3/2} + 96256\,q^2 + 1143745\,q^{5/2} + \cdots),$$

wobei $\chi_{1/2} = \sqrt{\sum_{n\in\mathbf{Z}} q^{\frac{1}{2}n^2}/(q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n))}$.

Diese Babymonster Vertexoperator-Superalgebra ist das Analogon zum kürzeren Golay Code bzw. zum kürzeren Leechgitter. Das Hauptanliegen der Arbeit ist aber allgemeiner und besteht in der Entwicklung einer neuen Methode zur systematischen Klassifikation der selbstdualen Vertexoperator-Superalgebren. Das oben angegebene Resultat ordnet sich so in das in diesem Zusammenhang erzielte Klassifikationsresultat für die spezielle Klasse der *extremalen* selbstdualen Vertexoperator-Superalgebren ein.

Wir geben in der Einleitung zuerst eine kurze Einführung in die verschiedenen Aspekte der Theorie und erläutern den von uns gewählten Zugang. In einem ergänzenden Abschnitt werden einige der Zusammenhänge zu anderen Gebieten beschrieben, die diese Arbeit motiviert haben. Dort werden auch einige der zugehörigen Begiffe erläutert. Schließlich geben wir eine Zusammenfassung über den Aufbau der Arbeit und der erzielten Resultate. Der vor allem hieran interessierte Leser sollte gleich mit diesem Abschnitt beginnen.

Einführung in die Theorie der VOAs und die vorliegende Arbeit

Die Theorie der Vertexoperator-Algebren (VOAs) wurde vor etwa zehn Jahren von R. Borcherds [Bor86] sowie I. Frenkel, J. Lepowsky und A. Meurmann [FLM88] eingeführt, um einen Mondscheinmodul $V^\natural$ für das Monster [Gri82] — der größten sporadischen endlichen einfachen Gruppe — zu konstruieren und damit Teile des als *Monstrous Moonshine* bekannten Phänomens [CN79] zu verstehen. Gleichzeitig sind VOAs die mathematische Präzisierung des physikalischen Begriffs der Chiralen Algebra einer konformen Quantenfeldtheorie [BPZ84].

Die wesentlichen Daten einer Vertexoperator-Superalgebra (SVOA) sind ein graduierter komplexer Vektorraum $V = \bigoplus_{n\in\frac{1}{2}\mathbf{Z}_{\geq 0}} V_n$ mit endlichdimensionalen V_n, zusammen mit einer linearen Abbildung $Y(.,z) : V \to \mathrm{End}(V)[[z,z^{-1}]]$ von V in den Vektorraum der formalen Laurentreihen mit Koeffizienten in den Endomorphismen von V und zwei ausgezeichneten Elementen $\mathbf{1} \in V_0$ und $\omega \in V_2$. Die Reihen $Y(v,z)$ für Elemente v aus V werden als Vertexoperatoren bezeichnet.

Zusätzlich zu einer Reihe von Endlichkeitsbedingungen gelten zwei Hauptaxiome. Das eine ist die *Kommutativität* der Vertexoperatoren:

$$Y(u,z_1)Y(v,z_2) \sim \pm\, Y(v,z_2)Y(u,z_1),$$

wobei die Tilde $\sim$ so zu verstehen ist, daß es eine natürliche Zahl n gibt, so daß nach Multiplikation beider Seiten mit $(z_1-z_2)^n$ eine Gleichheit zwischen formalen Laurentreihen besteht. Die technische Schwierigkeit hier ist, daß Reihenentwicklungen von $(z_1-z_2)^{-n}$ in verschieden Gebieten von $\mathbf{C}^2$ verglichen werden müssen. Das andere Hauptaxiom betrifft das Element ω. Die Koeffizienten des Vertexoperators $Y(\omega,z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} L_n z^{-n-2}$ sollen eine Darstellung der *Virasoroalgebra* bilden:

$$[L_n, L_m] = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{12}(m^3-m)\delta_{m+n}c\cdot \mathrm{id}_V.$$

Die reelle Zahl c wird als der *Rang* der VOA bezeichnet. Die Operation der Virasoroalgebra muß mit der Vertexoperator Abbildung $Y(.,z)$ verträglich sein, was durch die Beziehung

$$\frac{d}{dz}Y(v,z) = Y(L_{-1}v,z), \quad \text{für } v \in V$$

gefordert wird.

Der Schwerpunkt der bisherigen mathematischen Forschung auf diesem Gebiet lag einerseits in der Konstruktion spezieller Beispiele, wie VOAs zu Höchstgewichtsdarstellungen von affinen Kac-Moody Algebren [FZ92] oder der Virasoroalgebra [Wan93], und andererseits in der Entwicklung der allgemeinen Theorie, insbesondere einer Darstellungstheorie für VOAs sowie möglichen Verallgemeinerungen der Struktur wie Vertexoperator-Superalgebren (SVOAs) oder, noch allgemeiner, abelschen Intertwineralgebren [DL93].

Die allgemeine Theorie umfaßt die Entwicklung der Darstellungstheorie mit den Begriffen Modul, Intertwineroperator [FHL93] und Tensorprodukt [HL94c, Li94] sowie eine geometrische Interpretation mit Hilfe des Modulraumes punktierter Riemannscher Flächen [Hua91] und durch Operaden [HL94b]. Da sich Flächen höheren Geschlechtes durch Zusammenkleben 3-fach punktierter Sphären erhalten lassen, sollten Eigenschaften für höheres Geschlecht, wie z.B. in den Arbeiten [Zhu90, Zhu94], sich als Folgerungen ergeben.

Wir werden in dieser Arbeit auf den geometrischen Standpunkt und den Zusammenhang zu Operaden nicht weiter eingehen. Das einzige wichtige Resultat, das wir aus der Theorie für höheres Geschlecht benötigen, ist das Modultransformationsverhalten des *Charakters*

$$\chi_V = q^{-\frac{c}{24}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \dim V_n \cdot q^n$$

einer VOA V sowie der Charaktere ihrer Moduln [Zhu90] und die Verallgemeinerung für SVOAs.

Die natürliche Frage nach der Klassifikation von SVOAs ist von der mathematischen Seite bislang noch kaum untersucht worden. Für die Vektoren in $V_{1/2}$, V_1 oder V_2 einer SVOA V ist bekannt, daß sie unter gewissen Bedingungen (S)VOAs erzeugen, die zur unendlichdimensionalen Clifford, zu affinen Kac-Moody bzw. Virasoro Algebren assoziert sind. Systematische Klassifkationsansätze sind bisher allerdings noch nicht entwickelt worden, zumindest nicht von der mathematischen Seite. Eine Klassifikation aller VOAs wird auch nicht möglich sein: Jedes gerade Gitter definiert eine VOA und schon die selbstdualen geraden Gitter ab Rang 32 sind nicht mehr explizit zu klassifizieren, da ihre Anzahl für höhere Ränge sehr stark anwächst.

Andererseits wurde schon in [FLM88] für die Monster-VOA $V^\natural$ vom Rang 24 vermutet, daß sie die einzige selbstduale VOA vom Rang 24 mit $V_1 = 0$ ist. Diese — bisher noch nicht bewiesene — Eigenschaft wäre das Analogon entsprechender Aussagen für den Golay Code und das Leechgitter in Dimension 24. Ganz allgemein scheint eine tieferliegende, nicht restlos verstandene Analogie zwischen *Codes*, *Gittern* und *VOAs* zu bestehen (vgl. [God89]), wenn auch Codes und Gitter und ihre Beziehung untereinander recht gut verstanden sind. Es existiert eine injektive Abbildung von der Menge der Codes in die der Gitter sowie — in einem nächsten Schritt — eine injektive Abbildung von der Menge der Gitter in die der VOAs. Trotzdem sollte jede der drei Objektklassen auch für sich untersucht werden, da jede der drei ihre eigene Hierarchie an Resultaten besitzt.

Schellekens [Sch92] hat eine Liste von 71 VOAs angegeben, die vermutlich alle selbstdualen VOAs vom Rang 24 beschreiben, allerdings ist nur für einen Teil der Liste die volle VOA-Struktur konstruiert, und die Klassifikationsmethode bedarf noch einer mathematischen Rechtfertigung. Dieses Resultat ist das Analogon der Klassifikation der selbstdualen geraden Gitter vom Rang 24 durch Niemeier [Nie73, CS93] und eines entsprechenden

Resultates für Codes (9 Codes, [MS77]). Selbstduale ungerade Codes und selbstduale ungerade Gitter sind ebenfalls bis zum Rang 24 klassifiziert (s. [CP80] für Codes und [CS82], Kapitel 16, für Gitter). Ihre Klassifikation kann auf die Klassifikation der geraden Codes und Gitter in Dimension 24 zurückgeführt werden. Das Analogon zu *ungeraden* Codes und Gittern bilden Vertexoperator-*Super*algebren. Ihre Klassifikation kann ganz analog auf die der selbstdualen VOAs zurückgeführt werden.

Als Folgerung des Modultransformationsverhaltens des Charakters läßt sich zeigen, daß SVOAs stets einen halbganzen Rang besitzen. Bei Rang $23\frac{1}{2}$ findet sich als ein interessantes Beispiel die schon zu Beginn erwähnte Babymonster-SVOA $VB^{\natural}$, auf der das von B. Fischer gefundene und in [LcS77] konstruierte Babymonster B in natürlicher Weise operiert. Diese Babymonster-SVOA besitzt als Charakter die Modulfunktion

$$\chi_{VB^{\natural}} = q^{-\frac{47}{48}}(1 + 4371\, q^{\frac{3}{2}} + 96256\, q^2 + 1143745\, q^{\frac{5}{2}} + 9646891\, q^3 + 64680601\, q^{\frac{7}{2}} + \cdots),$$

deren Berechnung den Ausgangspunkt zu dieser Arbeit bildete. Die SVOA $VB^{\natural}$ ist das Analogon des kürzeren Golay Codes g_{22} in Dimension 22 und des kürzeren Leechgitters O_{23} in Dimension 23. Wir vermuten, daß $VB^{\natural}$ selbstdual ist.

Die in dieser Arbeit entwickelte Klassifikationsmethode für selbstduale (S)VOAs verwendet Strukturaussagen für von Vektoren kleinen Gewichts erzeugte SVOAs, das Modultransformationsverhalten der Charaktere sowie die Beziehung zwischen selbstdualen SVOAs und VOAs. Einige der in den Resultaten der Arbeit gemachten technischen Annahmen werden sich wohl durch weitere Untersuchungen als unnötig erweisen. Eine Hoffnung ist, daß das Verständnis von SVOAs bis zum Rang 26 nützlich für Anwendungen sein wird, ähnlich wie z.B. Cartans Klassifikation der halbeinfachen Liealgebren oder die Klassifikation der selbstdualen Codes und Gitter in Dimensionen bis 26. Zumindest wird eine für sich interessante Struktur sichtbar.

Zusammenhänge zu anderen Gebieten

Wir erläutern in diesem Abschnitt kurz einige der Zusammenhänge zu anderen Gebieten, die für diese Arbeit von Bedeutung waren. Ansonsten sei auf die angegebene Literatur verwiesen, insbesondere auf die ausführliche Einleitung in [FLM88].

Kombinatorik: Codes, Gitter und VOAs

Eine Einführung und Standardreferenz zur Codierungstheorie ist das Buch [MS77]. Für Gitter und Kugelpackungen bietet [CS93] eine ziemlich vollständige Übersicht. Codes und Gitter, die ersten beiden Objektklassen der dreifachen Analogie zwischen Codes, Gittern und VOAs, werden auch in [Ebe94] ausführlich untersucht. Dieses Buch basiert auf einer Vorlesung von Prof. Hirzebruch, die ich im Wintersemester 86/87 in Bonn gehört habe.

Wir fassen hier kurz die wichtigsten Definitionen für Codes und Gitter zusammen.

Ein (binärer linearer) Code C der Länge n ist ein linearer Unterraum des Vektorraumes $\mathbf{F}_2^n$ über dem Körper mit 2 Elementen. Auf $\mathbf{F}_2^n$ hat man das Standardskalarprodukt $(c,d) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot d_i$ für Vektoren $c, d \in \mathbf{F}_2^n$. Mit $C^\perp$ wird der zu C bezüglich $(.,.)$ orthogonale Code bezeichnet. Ein Code C heißt *selbstdual*, falls $C = C^\perp$ gilt und *(doppelt) gerade* falls das Gewicht $w(c) = \sum_{i=1}^n c_i \in \mathbf{Z}$ für alle $c \in C$ durch 4 teilbar ist. Das *Gewichtszählerpolynom* von C ist die erzeugende Funktion

$$W_C(x) = \sum_{c \in C} x^{n-w(c)}$$

für die Anzahl der Codewörter vom festem Gewicht.

Ein Gitter L vom Rang n ist eine diskrete Untergruppe von maximalen Rang in dem Vektorraum $\mathbf{R}^n$, der die standard euklidischen Struktur besitzt. Mit $L^* = \{x \in \mathbf{R}^n \mid (x,y) \in \mathbf{Z}$ für alle $y \in L\}$ wird das zu L duale Gitter bezeichnet. Das Gitter L heißt ganz, falls $L \subset L^*$ ist, d.h. das Skalarprodukt zwischen zwei beliebigen Gittervektoren eine ganze Zahl ist. Ein Gitter L heißt *selbstdual* oder unimodular, falls $L = L^*$ gilt und *gerade*, falls die Quadratlänge (x,x) für alle $x \in L$ durch 2 teilbar ist. Die *Thetareihe* von L ist die erzeugende Funktion

$$\Theta_L(q) = \sum_{x \in L} q^{\frac{1}{2}(x,x)}$$

für die Anzahl der Gittervektoren von fester Quadratlänge.

Jedem Code C kann ein Gitter L_C zugeordnet werden:

$$L_C := \frac{1}{\sqrt{2}} \rho^{-1}(C),$$

wobei $\rho : \mathbf{Z}^n \longrightarrow \mathbf{F}_2^n$ die Reduktion modulo 2 darstellt. Ist C selbstorthogonal, selbstdual bzw. gerade, so ist L_C ganz, selbstdual bzw. gerade.

Für SVOAs hat man analoge Definitionen: Eine SVOA heißt *selbstdual*, falls sie genau einen irreduziblen Modul besitzt. Eine gerade SVOA ist eine *VOA* und der *Charakter* ist die erzeugende Funktion für die Dimensionen der homogenen Komponenten. Jedem ganzen Gitter L kann eine SVOA V_L zugeordnet werden.

Einen weiteren vierten Schritt in der Analogie zwischen Codes, Gittern und VOAs bilden Codes über der Kleinschen Vierergruppe $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ (s. [Höh96]).

Gruppentheorie: Endliche einfache Gruppen und Liealgebren

Die kompakten einfachen zusammenhängenden Lieschen Gruppen sind vor hundert Jahren unabhängig von W. Killing und E. Cartan klassifiziert worden. Die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen kam vor etwa 15 Jahren zu einem Abschluß: Die Liste der endlichen einfachen Gruppen besteht aus den zyklischen Gruppen von Primzahlordnung, den alternierenden Gruppen, den Gruppen von Lieschem Typ sowie einer Liste von 26

Ausnahmegruppen, den sogenannten sporadischen einfachen Gruppen [CCN+85, Asc94]. Die größte sporadische einfache Gruppe ist das Monster, die zweitgrößte das Babymonster.

Ähnlich wie die Darstellungstheorie von kompakten Lieschen Gruppen bzw. ihren Liealgebren kann die Darstellungstheorie von affinen Kac-Moody Algebren, den Liealgebren von Schleifengruppen kompakter Liescher Gruppen, entwickelt werden [Kac90]. Es stellt sich heraus, daß die integrablen Höchstgewichtsdarstellungen von affinen Kac-Moody Algebren die größere Struktur einer VOA bzw. von Moduln hierüber besitzen [FZ92]. Die Automorphismengruppe dieser VOAs ist die zu der affinen Kac-Moody Algebra gehörige Liesche Gruppe.

Andererseits finden sich auch VOAs mit endlichen Gruppen als Automorphismengruppen, wie z.B. der Mondscheinmodul $V^\natural$, der das Monster als Automorphismengruppe besitzt [FLM88] oder die in dieser Arbeit konstruierte SVOA mit dem Babymonster als Automorphismengruppe. Vom Standpunkt der VOA-Theorie stehen also endliche und Liesche Gruppen auf einer Stufe.

Die fünf Mathieugruppen lassen sich am einfachsten mit Hilfe der Golay Codes verstehen, sieben weitere sporadische Gruppen mit Hilfe des Leechgitters. Die restlichen durch das Monster gegebenen sporadischen Gruppen sollten sich alle in natürlicher Weise als Automorphismengruppen von VOAs beschreiben lassen. Ob die übrigen sechs als „Parias“ bezeichneten sporadischen Gruppen eine angemessene Beschreibung durch VOAs besitzen ist offen. Das Studium von VOAs über endlichen Körpern könnte vielleicht Resultate in dieser Richtung liefern (vgl. [Ryb94, BR]).

Mathematische Physik: Konforme Quantenfeldtheorie und Stringtheorie

Die der Quantenmechanik zugrunde liegende Mathematik ist im wesentlichen die lineare Algebra von hermiteschen Vektorräumen sowie die Darstellungstheorie von endlichen Gruppen und Liealgebren.

Für Quantenfeldtheorien (QFTs) wie die Quantenelektrodynamik ist gegenwärtig keine vollständig befriedigende mathematische Beschreibung verfügbar, obwohl dies für einzelne Bausteine wie die Differentialgeometrie von Prinzipalbündeln zutrifft. Einen recht allgemeinen Rahmen zur Beschreibung von QFTs liefern die *Wightman Axiome* [SW89, Haa92]. Lange Zeit waren allerdings keine vollständig konstruierten nichttrivialen Beispiele bekannt.

Diese änderte sich mit dem Auffinden von konformen Quantenfeldtheorien [BPZ84, God89]. Sie sind gerade die QFTs, die den Wightman Axiomen und den (geeignet erweiterten) Atiyah'schen Axiomen einer topologischen QFT [Ati90] für zweidimensionale Raumzeiten mit konformer Struktur genügen. VOAs bilden die einer konformen QFT unterliegendende mathematische Struktur, sie entsprechen der Chiralen Algebra. Die

Einbeziehung von Fermionen als Feldern zu halbganzen Spindarstellungen entspricht der Erweiterung zu SVOAs.

Schließlich sei auf Verbindungen zur Stringtheorie [LT89, Man89, Bor92b] hingewiesen. Nur in Dimension 26 läßt sich die bosonische Stringtheorie „anomaliefrei" formulieren. Dies ist gerade der Rang der von Borcherds in [Bor92a] aus dem Mondscheinmodul konstruierten Monster Liealgebra, die dem Raum der „physikalischen Zustände des Strings" entspricht. In der heterotischen Stringtheorie kommt den beiden selbstdualen VOAs $V_{E_8} \otimes V_{E_8}$ und $V_{D_{16}^+}$ vom Rang 16 eine wichtige Rolle zu.

Differential-Topologie: Elliptische Geschlechter

Der analytische Index $\mathrm{Ind}(D \otimes E)$ eines mit einem reellen Vektorbündel E getwisteten reellen Diracoperators über einer n-dimensionalen Spin Mannigfaltigkeit X ist ein Element in $\widetilde{\mathcal{M}}_n/i^*\widetilde{\mathcal{M}}_{n+1}$, den graduierten Cliffordalgebren $Cl_n(\mathbf{R})$-Moduln modulo denen, die schon $Cl_{n+1}(\mathbf{R})$-Moduln sind. Der topologische Index kann durch eine Abbildung

$$\alpha \ : \ \Omega_*^{\mathrm{Spin}}(\mathrm{BO}) \longrightarrow KO^{-*}(\mathrm{pt})$$

in die KO-Theorie beschrieben werden. Der Atiyah-Singer Indexsatz besagt, daß folgende Gleichheit gilt:

$$\mathrm{Ind}(D \otimes E) = \alpha(X, E).$$

Hierbei wird nach Atiyah-Bott-Shapiro $KO^{-n}(\mathrm{pt})$ mit $\widetilde{\mathcal{M}}_n/i^*\widetilde{\mathcal{M}}_{n+1}$ identifiziert.

Elliptische Geschlechter [HBJ92] sind die *formale* stringtheoretisch motivierte Erweiterung des topologischen Indexes auf den Schleifenraum $\mathcal{L}X$. Die VOAs bilden hier in gewisser Weise das stringtheoretische Analogon zur Struktur des Vektorraumes im klassischen Fall. Für eine fixierte (S)VOA V betrachtet man die Abbildung

$$\mathcal{L}\alpha \ : \ \Omega_*^{\mathrm{Spin}}(\mathrm{BAut}(V)) \longrightarrow KO^{-n}(\mathrm{pt})[[q]], \quad (X, \widetilde{V}) \mapsto \alpha(X, \bigotimes_{n=1}^{\infty} S_{q^n} TX_{\mathbf{C}} \otimes \widetilde{V}),$$

wobei $\widetilde{V} = \bigoplus_{n \geq 0} \widetilde{V}_n \, q^n$ das zu dem $\mathrm{Aut}(V)$-Prinzipalbündel assoziierte Element in $KO(X)[[q]]$ bezeichnet. Ist z.B. V die zur fundamentalen Stufe 1 Darstellung der affinen Liealgebra $\widehat{\mathbf{so}}(n)$ assoziierte SVOA $V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes n}$, so erhält man für das zum Tangentialbündel gehörige $\mathbf{SO}(n)$-Prinzipalbündel das elliptische Geschlecht der Stufe 2, welches auch als die formale S^1-äquivariante Signatur des Schleifenraumes definiert ist.

Gegenwärtig sind noch kaum Definitionen oder Sätze bekannt, die den Schleifenraum verwenden oder die volle VOA-Struktur beinhalten. Insbesondere fehlt eine zur K-Theorie analoge geometrische Definition von elliptischer Kohomologie (vgl. [Seg88]). Ein Resultat in dieser Richtung ist von H. Tamanoi erzielt worden [Tam95a]. Er zeigt u.a. daß das elliptische Geschlecht ein (S)VOA-Modul über der (S)VOA der parallelen Schnitte in $\widetilde{V}$

ist. Das vom Verfasser in seiner Diplomarbeit [Hö91] für komplexe Mannigfaltigkeiten mit erster Chernklassse $c_1 = 0$ eingeführte und untersuchte universelle komplexe elliptische Geschlecht φ_{ell} steht in Verbindung zu $N = 2$ supersymmetrischen SVOAs [KYY93].

Aufbau der Arbeit und Zusammenfassung der Resultate

In *Kapitel 1* finden sich die Definitionen von Vertexoperator-Superalgebren, deren Moduln und den Intertwinerräumen. Es werden die wichtigsten bekannten Beispiele und Klassifikationsresultate zusammengestellt. Nach einer Einführung der wichtigsten Begriffe aus der Theorie der Modulfunktionen beschreiben wir die Resultate von Zhu über die Korrelationsfunktionen auf Riemanschen Flächen vom Geschlecht 1 und ihre Verallgemeinerungen für SVOAs:

Satz: *Die n-Punkt Korrelationsfunktionen auf dem Torus einer vollständigen Liste M_1, M_2, …, M_m von irreduziblen Moduln einer „schönen“ rationalen SVOA V formen einen Γ_θ-Modul.*

Die Thetagruppe Γ_θ — die Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, die eine der Spinstrukturen auf dem Torus $\mathbf{C}/(\mathbf{Z}\tau + \mathbf{Z})$ fixiert — operiert dabei in der üblichen Weise auf $\mathbf{C}^n \times \mathbf{H}$.

In *Kapitel 2* werden selbstduale (S)VOAs betrachtet. Außer deren Definition und der Diskussion der bisher bekannten Beispiele werden die folgenden beiden Aussagen über den Charakter einer selbstdualen (S)VOA bewiesen:

Satz: *(a) Der Charakter einer selbstdualen „schönen“ rationalen VOA ist ein homogenes Polynom in den Charakteren der VOAs V_{E_8} und $V^\natural$.*

(b) Der Charakter einer selbstdualen „sehr schönen“ unitären rationalen SVOA ist ein homogenes Polynom in den Charakteren der SVOAs V_{Fermi} und V_{E_8}.

Insbesondere erhalten wir als Korollar, daß der Rang einer wie im Satz betrachteten SVOA eine halbganze Zahl ist.

Kapitel 3 untersucht die Beziehung zwischen selbstdualen SVOAs und VOAs. Es wird der folgende Zusammenhang gefunden:

Seien $c \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ und $d > c$, $d \in 8\mathbf{Z}$. Dann besteht eine $1:1$-Korrespondenz zwischen

(1) Isomorphieklassen von selbstdualen „sehr schönen“ unitären SVOAs vom Rang c.

(2) Isomorphieklassen von Paaren $(V, V_{\mathbf{SO}(k)})$ von selbstdualen „schönen“ unitären VOAs V vom Rang d zusammen mit einer Unter-VOA $V_{\mathbf{SO}(k)}$ vom Rang $\frac{k}{2} = d - c$. (Falls $k = 8$, ist wegen der Triality von $\mathbf{so}(8)$ zusätzlich ein $V_{\mathbf{SO}(8)}$-Modul bis auf Isomorphie zu fixieren.)

Bewiesen werden in dieser Arbeit allerdings nur Teile der Richtung (2) nach (1) unter einer weiteren schwachen Rationalitätsforderung. Der Zusammenhang erlaubt es uns, die vermutlich vollständige Liste aller selbstdualen SVOAs bis zum Rang 16 anzugeben.

In *Kapitel 4* wird dieser Zusammenhang auf den Mondscheinmodul $V^\natural$ angewendet, und man erhält die Babymonster-SVOA:

Satz: *Es existiert eine SVOA $VB^\natural$ vom Rang $23\frac{1}{2}$ mit Charakter*

$$\chi_{VB^\natural} = -\frac{31}{16}\,\chi^{47}_{V_{\rm Fermi}} + \frac{47}{16}\,\chi^{31}_{V_{\rm Fermi}}\chi_{E_8} = q^{-\frac{47}{48}}(1 + 4371\,q^{\frac{3}{2}} + 96256\,q^2 + 1143745\,q^{\frac{5}{2}} + \cdots),$$

auf der die Gruppe $2\times B$, wobei B das Babymonster ist, in natürlicher Weise operiert.

Wir vermuten, daß $VB^\natural$ selbstdual und die einzige solche SVOA V vom Rang $23\frac{1}{2}$ mit $V_{1/2} = V_1 = 0$ ist. Die SVOA $VB^\natural$ sollte als das natürliche Objekt angesehen werden, welches das Babymonster B, die zweitgrößte sporadische einfache endliche Gruppe, definiert.

In *Kapitel 5* schließlich werden allgemein *extremale selbstduale (S)VOAs* betrachtet. Dies sind selbstduale (S)VOAs, für die die ersten Koeffizienten des Charakters so klein wie möglich sind, bei Berücksichtigung der in Kapitel 2 beschriebenen Struktur der Charaktere. Man erhält in Analogie zu Codes und Gittern das folgende Klassifikationsresultat:

Satz: *Extremale selbstduale „sehr schöne" unitäre rationale SVOAs existieren nur für die Ränge $\frac{1}{2}$, 1, …, $7\frac{1}{2}$, 8, 12, 14, 15, $15\frac{1}{2}$, $23\frac{1}{2}$ und 24. Für jeden Rang ist genau ein Beispiel bekannt: $V_{\rm Fermi}$, $V_{\rm Fermi}^{\otimes 2}$, …, $V_{\rm Fermi}^{\otimes 15}$, V_{E_8}, $V_{D_{12}^+}$, $V_{(E_7+E_7)^+}$, $V_{A_{15}^+}$, $V_{E_{8,2}^+}$, $VB^\natural$ und $V^\natural$.*

Für die Beispiele $V_{E_{8,2}^+}$ und $VB^\natural$ sind allerdings nicht alle Eigenschaften bewiesen. Es wird vermutet, daß die angegebene Liste von extremalen SVOAs vollständig ist.

Chapter 1

Grundlagen der Theorie der Vertexoperator-Superalgebren

In diesem ersten Kapitel finden sich die wichtigsten Begriffe und Resultate aus der Theorie der VOAs, die in dieser Arbeit benötigen werden. Eine Einführung in dieses Gebiet geben die beiden Bücher [FLM88] und [FHL93]. Für eine Zusammenfassung des gegenwärtigen Standes der Theorie sei auf die drei Übersichtsartikel [Don95, Li95, Hua95b] und die dortigen Literaturangaben verwiesen.

Abschnitt 1 enthält die Definition von SVOAs, ihren Moduln und den Intertwinerräumen. Wir geben die Umformulierung der Jacobi-Identität in Termen von Korrelationsfunktionen auf der Sphäre, welche uns später in Kapitel 3 erlauben wird, die Axiome der dort konstruierten SVOAs zu verifizieren. Zusätzlich werden symmetrische und hermitesche Bilinearformen betrachtet und die Konstruktion des (äußeren) Tensorproduktes besprochen. In Abschnitt 2 beschreiben wir die wichtigsten Beispiele von VOAs und beweisen einige Strukturaussagen über (S)VOAs, die von Vektoren vom Gewicht $\frac{1}{2}$, 1 oder 2 erzeugt werden. Abschnitt 3 stellt die in dieser Arbeit benötigten Grundlagen aus der Theorie der Modulfunktionen zusammen. Schließlich finden sich in Abschnitt 4 die Resultate über Korrelationsfunktionen auf Riemanschen Flächen vom Geschlecht 1, die sich gegenwärtig schon aus dem axiomatischen algebraischen Zugang zur konformen Quantenfeldtheorie mittels VOAs herleiten lassen. Wir formulieren eine SVOA-Erweiterung des Zhu'chen Resultates [Zhu90] über das Modultransformationsverhalten der Korrelationsfunktionen der Moduln einer VOA.

1.1 Definitionen und grundlegende Sätze

Die Axiome von Vertexoperator-Algebren sind aus der mathematischen Präzisierung des Begriffs der chiralen Algebra einer konformen Quantenfeldtheorie auf der Riemannschen Zahlenkugel entstanden.

Die n-Punkt Korrelationsfunktionen von Vertexoperatoren sind rationale Funktionen, deren Potenzreihenentwicklung im allgemeinen nicht in ganz $\mathbf{C}^n$ konvergieren werden. Um trotzdem Entwicklungen in verschiedenen Gebieten vergleichen zu können, verwenden wir in der Definition von (S)VOAs die formale Entwicklung der δ-Distribution bei 0:

$$\delta(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} z^n \in \mathbf{C}[[z, z^{-1}]].$$

Die Reihe $\delta(z_1 + z_2)$ wird definiert durch

$$\delta(z_1 + z_2) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \sum_{m\in\mathbf{N}} \binom{n}{m} z_1^{n-m} z_2^m,$$

d.h. alle binomische Ausdrücke werden in nichtnegative ganze Potenzen in der zweiten Variable z_2 entwickelt. Man beachte, daß die Definition in z_1 und z_2 nicht symmetrisch ist.

Definition 1.1.1 *Eine Vertexoperator-Superalgebra (SVOA) ist ein Tupel* $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$, *bestehend aus einem* $\frac{1}{2}\mathbf{Z}$*-graduierten* $\mathbf{C}$*-Vektorraum* $V = \bigoplus_{n\in\frac{1}{2}\mathbf{Z}} V_n$, *einer linearen Abbildung* $Y(\,.\,, z) : V \longrightarrow \mathrm{End}(V)[[z, z^{-1}]]$, $a \mapsto Y(a, z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n\, z^{-n-1}$ *(dem Vertexoperator) und zwei Elementen* $\mathbf{1} \in V_0$ *(dem Vakuum) und* $\omega \in V_2$ *(dem Virasoroelement), das den folgenden Axiomen genügt:*

(A1) (Regularität)
— $\dim V_n < \infty$ *für alle* n *und* $\dim V_n = 0$ *für* n *hinreichend klein,*
— *für alle* a, $b \in V$ *ist* $a_n b = 0$, *wenn* n *genügend groß,*
— $Y(a, z) = 0$ *genau dann, wenn* $a = 0$.

(A2) $Y(\mathbf{1}, z) = \mathrm{id}_V$.

(A3) Die Koeffizienten von

$$Y(\omega, z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \omega_n\, z^{-n-1} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} L_n\, z^{-n-2}$$

erfüllen die Bedingungen
— $L_0|_{V_n} = n \cdot \mathrm{id}_{V_n}$,
— $Y(L_{-1}a, z) = \frac{d}{dz} Y(a, z)$ *für alle* $a \in V$ *(Translationseigenschaft),*
— $[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\, c\, \delta_{m+n,0} \cdot \mathrm{id}_V$ *(Virasoro Algebra),*
wobei $c \in \mathbf{C}$ *als der Rang von* V *bezeichnet wird.*

(A4) Für alle homogenen a, $b \in V$ gilt (Jakobiidentität):

$$t^{-1}\delta\left(\frac{z-w}{t}\right)Y(a,z)Y(b,w)-(-1)^{|a||b|}t^{-1}\delta\left(\frac{w-z}{-t}\right)Y(b,w)Y(a,z)$$
$$=w^{-1}\delta\left(\frac{z-t}{w}\right)(Y(Y(a,t)b),w)$$

mit

$$|u|=\begin{cases}0, & \textit{für } u\in\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}V_n\\ 1, & \textit{für } u\in\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}+\frac{1}{2}}V_n.\end{cases}$$

Wir setzen $V_{(0)}=\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}V_n$ bzw. $V_{(1)}=\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}+\frac{1}{2}}V_n$ und bezeichnen $V_{(0)}$ als den *geraden* und $V_{(1)}$ als den *ungeraden* Teil von V. Elemente in $V_{(0)}$ (bzw. $V_{(1)}$) heißen *gerade* (bzw. *ungerade*). Für das Tupel $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ schreiben wir meist nur V, falls klar ist, welche Vertexoperator Struktur auf V betrachtet wird. Eine *Vertexoperator-Algebra* (kurz VOA) ist eine SVOA $V=V_{(0)}$, die nur aus geraden Elementen besteht.

Ein Element a hat das *(konforme) Gewicht* k, falls $a\in V_k$. Die Koeffizienten $a_n\in\mathrm{End}(V)$ des Vertexoperators $Y(a,z)$ sind dann homogen vom Grad $k-n-1$:

$$a_n(V_m)\subset V_{m+k-n-1}.$$

Zwei wichtige Folgerungen aus der Jakobiidentität sind die *Kommutatorrelationen:*

$$[a_n,b_m]=\sum_{i\geq 0}\binom{m}{i}(a_ib)_{m+n-i}, \tag{1.1}$$

und die *Assoziativitätsrelationen:*

$$(a_lb)_n=\sum_{i\geq 0}(-1)^i\binom{l}{i}\left(a_{l-i}b_{n+i}-(-1)^la_{l+n-i}b_i\right) \tag{1.2}$$

Die drei Abbildungen L_{-1}, L_0 und L_1 erzeugen eine Liealgebra $\mathbf{sl}_2(\mathbf{C})$, unter denen die Vertexoperatoren zu Elementen $a\in V$ die folgenden Transformationseigenschaft besitzen:

$$[L_{-1},Y(a,z)] = Y(L_{-1}a,z), \tag{1.3}$$
$$[L_0,Y(a,z)] = Y(L_0a,z)+z\,Y(L_{-1}a,z), \tag{1.4}$$
$$[L_1,Y(a,z)] = Y(L_1a,z)+2z\,Y(L_0a,z)+z^2\,Y(L_{-1}a,z). \tag{1.5}$$

Den wichtigen Begriff der Darstellung einer (S)VOA beschreibt die

Definition 1.1.2 *Ein Modul einer SVOA V ist ein Paar (M,Y_M), bestehend aus einem $\mathbf{Q}$-graduierten $\mathbf{C}$-Vektorraum $M=\bigoplus_{n\in\mathbf{Q}}M_n$ und einer linearen Abbildung $Y_M(\,.\,,z):V\longrightarrow\mathrm{End}(M)[[z,z^{-1}]]$, $a\mapsto Y_M(a,z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}a_n\,z^{-n-1}$, das den folgenden Axiomen genügt:*

(B1) (Regularität)
— $\dim M_n < \infty$ *für alle* n *und* $\dim M_n = 0$ *für* n *hinreichend klein,*
— *für alle* $a \in V$, $b \in M$ *ist* $a_n b = 0$, *wenn* n *genügend groß,*
— $Y_M(a, z) = 0$ *genau dann, wenn* $a = 0$.

(B2) $Y_M(\mathbf{1}, z) = \mathrm{id}_M$.

(B3) Die Koeffizienten von

$$Y_M(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \omega_n\, z^{-n-1} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} L_n\, z^{-n-2}$$

erfüllen die Bedingungen
— $L_0|_{M_n} = n \cdot \mathrm{id}_{M_n}$,
— $Y_M(L_{-1}a, z) = \frac{d}{dz} Y_M(a, z)$ *für alle* $a \in V$ *(Translationseigenschaft),*
— $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\,\mathrm{rank}(V)\,\delta_{m+n,0} \cdot \mathrm{id_M}$ *(Virasoro Algebra).*

(B4) Für alle homogene a, $b \in V$ *gilt (Jakobiidentität):*

$$t^{-1}\delta\left(\frac{z-w}{t}\right) Y_M(a,z) Y_M(b,w) - (-1)^{|a||b|} t^{-1}\delta\left(\frac{w-z}{-t}\right) Y_M(b,w) Y_M(a,z)$$
$$= w^{-1}\delta\left(\frac{z-t}{w}\right) (Y_M(Y(a,t)b), w).$$

Wir bezeichen den V-Modul (M, Y_M) häufig mit M und den Vertexoperator Y_M einfach mit Y. Man hat die üblichen Modulnotationen wie Homomorphismus, direkte Summe und Irreduzibilität. Das *(konforme) Gewicht eines irreduziblen Moduls* M ist das kleinste $h \in \mathbf{Q}$ mit $\dim M_h > 0$.

Offensichtlich ist eine (S)VOA stets ein Modul über sich selbst, den wir als den *adjungierten Modul* bezeichnen. Eine (S)VOA heißt *einfach*, wenn sie als adjungierter Modul irreduzibel ist.

Zu jedem Modul M einer VOA V gibt es einen dualen Modul $(M', Y_{M'})$ (s. [FHL93], Abschnitt 5.2): Der unterliegende Vektorraum ist der eingeschränkte Dualraum $M' := \bigoplus_{n \in \mathbf{Q}} M_n^*$, und der Vertexoperator $Y_{M'}$ ist definiert durch

$$\langle Y_{M'}(a,z)w', w\rangle = \langle w', Y_M(e^{zL_1}(-z^{-2})^{L_0}a, z^{-1})w\rangle,$$

wobei $w \in M$, $w' \in M'$ und $a \in V$.

Wir sagen daß ein Modul einer SVOA die Bedingung $\mathbf{P}_{Vir}$ erfüllt, wenn er eine direkte Summe von Virasorohöchstgewichtsdarstellungen ist.

In [Zhu90] ist von Zhu die folgende Endlichkeitsbedingung $\mathbf{C}_2$ eingeführt worden: Sei $V_{-2}V$ der von Elementen des Typs $a_{-2}b$ aufgespannte Untervektorraum von V. Eine SVOA V erfüllt die Bedingung $\mathbf{C}_2$, falls der Quotient $V/(V_{-2}V)$ endlichdimensional ist.

Es ist nützlich, zusätzlich zu den Axiomen in Definition 1.1.1 und 1.1.2 noch die folgenden drei Bedingungen zu fordern:

Definition 1.1.3 („schön") *Eine (S)VOA V heißt „schön", wenn die folgenden Eigenschaften gelten:*
1) $V_m = 0$ *für* $m < 0$ *und* $V_0 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{1}$,
2) alle Moduln von V *und* $V_{(0)}$ *erfüllen die Bedingung* $\mathbf{P}_{Vir}$,
3) V *erfüllt die Bedingung* $\mathbf{C}_2$ *von Zhu.*

Die Bedingungen 1) und 2) sind auch aus physikalischer Sicht sinnvoll. Viele Sätze gelten nur unter diesen Voraussetzungen (vgl. z.B. [Lia94], Kap. 3), ansonsten lassen sich Gegenbeispiele finden. Verschiedene Autoren nehmen daher unterschiedliche Teile von 1.1.3 in die Definition einer (S)VOA mit auf. Der folgende Satz benötigt z.B. die Eigenschaften 1) und 2) (s. [Li]).

Satz 1.1.4 (Bilinearform) *Jede „schöne" VOA* V *besitzt eine eindeutige nicht ausgeartete symmetrische invariante Bilinearform* $(\,.\,,\,.\,)$, *die durch*

$$(a, b) \cdot \mathbf{1} = \mathrm{Res}_z z^{-1} (Y(e^{zL_1}(-z^{-2})^{L_0} a, z^{-1})b) \quad \textit{für } a, b \in V,$$

gegeben ist.

Invarianz ist hierbei durch

$$(Y(u, z)v, w) = (v, Y(e^{zL_1}(-z^{-2})^{L_0} u, z^{-1})w) \quad \text{für alle } u,\ v,\ w \in V$$

definiert.

Eine Beschreibung von Vertexoperatoren zwischen drei Moduln gibt die folgende Definition, in der wir uns auf den später benötigten Fall von VOAs beschränken. Dazu sei für einen Vektorraum V mit $V\{z\} = \{\sum_{n\in\mathbf{Q}} v_n z^n \mid v_n \in V\}$ der Raum der V-wertigen formalen Reihen in rationalen z-Potenzen bezeichnet.

Definition 1.1.5 (Intertwiner Operatoren) *Sei* V *eine VOA und seien* (M_i, Y_i), (M_j, Y_j) *und* (M_k, Y_k) *drei* V*-Moduln. Der Raum* $\binom{M_k}{M_i\ M_j}_V$ *der Intertwineroperatoren vom Typ* $\binom{k}{i\ j}$ *ist definiert als der* $\mathbf{C}$*-Vektorraum von linearen Abbildungen* $\mathcal{Y}(\,.\,, z) : W_i \longrightarrow \mathrm{Hom}(W_j, W_k)\{z\}$, $\mathcal{Y}(w, , z) = \sum_{n\in\mathbf{Q}} w_n\, z^{-n-1}$, *die den folgenden Axiomen genügen:*

(C1) (Regularität)
— für alle $m^{(i)} \in M_i$, $m^{(j)} \in M_j$ *ist* ${m^{(i)}}_n m^{(j)} = 0$, *wenn* n *genügend groß,*
— $\mathcal{Y}(m^{(i)}, z) = 0$ *genau dann, wenn* $m^{(i)} = 0$.

(C2) (Translationseigenschaft)

$$\mathcal{Y}(L_{-1}m^{(i)}, z) = \frac{d}{dz}\mathcal{Y}(m^{(i)}, z) \quad \textit{für alle } m^{(i)} \in M_i.$$

(C3) Für alle $a \in V$, $m^{(i)} \in M_i$ gilt (Jakobiidentität):

$$t^{-1}\delta\left(\frac{z-w}{t}\right) Y_k(a,z)\mathcal{Y}(m^{(i)}, w) - t^{-1}\delta\left(\frac{w-z}{-t}\right)\mathcal{Y}(m^{(i)}, w)Y_j(a,z)$$
$$= w^{-1}\delta\left(\frac{z-t}{w}\right)(\mathcal{Y}(Y_i(a,t)m^{(i)}), w).$$

Wir setzen $N_{ij}^k = \dim\binom{M_k}{M_i\ M_j}_V$ und bezeichnen diese Zahlen als die *Fusionsregeln*. Sie beschreiben in gewisser Weise die Zerlegung des (inneren) Tensorproduktes zweier irreduzibler Moduln in irreduzible Komponenten. Die Tensorprodukttheorie war von Huang und Lepowsky in den Arbeiten [HL94c, HL93a, HL93b, HL95, Hua95a] eingeführt worden. Ein anderer Ansatz hierfür findet sich in [Li94].

Definition 1.1.6 (Fusionsalgebra) *Die Fusionsalgebra $\mathcal{F}(V)$ einer SVOA V ist der von den irreduziblen Moduln von V erzeugte freie $\mathbf{Z}$-Modul zusammen mit der auf den Erzeugern durch $M_i \times M_j = \sum_k N_{ij}^k M_k$ definierten bilinearen Abbildung $\times : \mathcal{F}(V) \otimes \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$.*

Häufig wird $\mathcal{F}(V)$ auch als $\mathbf{C}$-Vektorraum angesehen. Es wird vermutet, daß $\mathcal{F}(V)$ eine kommutative und assoziative Algebra ist. Dies ist der Fall, wenn die Tensorprodukttheorie von Huang und Lepowsky anwendbar ist.

Die Jacobiidentität für SVOAs und ihre Moduln läßt sich mit Hilfe der „Dualität“ umformulieren. Sei V eine SVOA und M ein Modul. Für Elemente $a_1, \ldots, a_n \in V$ und $v \in M$, $v' \in M'$ konvergiert in dem Gebiet $|z_1| > \cdots > |z_n| > 0$ die Reihe

$$\langle v', Y(a_1,z_1)\ldots Y(a_n,z_n)v\rangle \in \mathbf{C}[[z_1, z_1^{-1}, \ldots, z_n, z_n^{-1}]]$$

zu einer rationalen Funktion $R_{v',v}((a_1,z_1),\ldots,(a_n,z_n)) \in \mathbf{C}[z_i, z_i^{-1}, \frac{1}{z_i - z_j}]$, die mögliche Pole bei 0, ∞ und z_j als Funktion in z_i besitzt. Wir bezeichnen diese Funktion als die *n-Punkt Korrelationsfunktion auf der Sphäre*.

Satz 1.1.7 (Kommutativität) *Seien $a_1, \ldots, a_n \in V$ homogene Elemente und $\sigma \in S_n$ eine Permutation. Dann gilt für die n-Punktkorellationsfunktionen (Kommutativität):*

$$R_{v',v}((a_1,z_1),\ldots,(a_n,z_n)) = (-1)^w R_{v',v}((a_{\sigma(1)}, z_{\sigma(1)}),\ldots,(a_{\sigma(n)}, z_{\sigma(n)})), \tag{1.6}$$

wobei w die Anzahl der Vertauschungen von ungeraden Elementen $a_i \in V_{(1)}$ in σ ist.

Physikalisch entspricht die (Anti-)Kommutativität der Kausalität — eine der fundamentalen Forderungen an eine Quantenfeldtheorie.

In [DL93], Kapitel 7, wurde gezeigt:

Satz 1.1.8 *In Definition 1.1.1 bzw. 1.1.2 kann die Jacobiidentität (Axiom (A4) bzw. (B4)) durch die Rationalität und Kommutativität (1.6) der 2-Punkt Korrelationsfunktionen auf der Sphäre und den beiden Bedingungen (1.3) und (1.4) für L_{-1} und L_0 ersetzt werden.*

Die Rationalität und Kommutativität ist in den Anwendungen oft leichter nachzuprüfen als die Jacobiidentität.

Eine wichtige Klasse von (S)VOAs besitzt zusätzlich die folgenden Eigenschaften:

Definition 1.1.9 (rational) *Eine (S)VOA heißt rational, falls der Rang rational ist, sie nur endlich viele irreduzible Moduln besitzt und jeder endlich erzeugte Modul eine direkte Summe von irreduziblen Moduln ist. Zusätzlich sollen für SVOAs diese Eigenschaften auch für die gerade Unter-VOA gelten.*

Es ist zu vermuten, daß die Rationalität des Ranges aus den anderen Bedingungen folgt (vgl. [AM88]).

Wir sagen: Eine VOA V ist von *reellem Typ*, falls sie die Komplexifizierung einer über $\mathbf{R}$ definierten VOA $V_{\mathbf{R}}$ ist: $V = V_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$.

Definition 1.1.10 (unitär) *Eine VOA V heißt unitär, wenn sie von reellem Typ ist und jeder V-Modul M eine positiv definite invariante hermitesche Bilinearform $\langle\,.\,,\,.\,\rangle_M$ besitzt. Invarianz bedeutet, daß für Elemente u, $v \in M$ und einen homogenen $\mathbf{sl}_2(\mathbf{C}) =$* $\mathrm{Span}_{\mathbf{C}}(L_{-1}, L_0, L_1)$ *Höchstgewichtsvektor $a \in (V_{\mathbf{R}})_h$ für alle $n \in \mathbf{Z}$ die Beziehung $\langle a_{-n-2(h-1)}u, v\rangle_M = \langle u, a_n v\rangle_M$ gilt.*

Eine Unter-VOA einer unitären VOA ist auch wieder unitär. Eine SVOA heißt unitär, wenn ihre gerade Unter-VOA unitär ist.

Lemma 1.1.11 *Für den Rang c einer „schönen" unitären VOA V und das konforme Gewicht h eines V-Moduls M gelten $c \geq 0$, $h \geq 0$.*

Beweis: Sei $v \in M$ ein normierter Virasorohöchstgewichtsvektor vom Gewicht (c, h). Aus der Beziehung $L_n L_{-n} v = L_{-n} L_n v + 2nh\, v + \frac{n(n^2-1)}{12} c\, v$ folgt $\langle L_{-n}v, L_{-n}v\rangle_M = 2nh + \frac{n(n^2-1)}{12}c$ für $n > 0$. Daraus ergibt sich für $n = 1$ die Ungleichung $h \geq 0$, und für n sehr groß die Ungleichung $c \geq 0$. $\square$

Lemma 1.1.12 *Der Gewicht 1 Anteil V_1 einer „schönen" unitären SVOA V ist eine reduktive Liealgebra, d.h. die direkte Summe einer abelschen und einer halbeinfachen Liealgebra.*

Beweis: 1) $\mathbf{g} := V_1$ ist eine Lie Algebra mit Lieklammer $[a,b] = a_0 b$.
2) Ist $\mathbf{u}$ ein Ideal von $\mathbf{g}$, so ist es wegen der Invarianz der hermiteschen Form auch das orthogonale Komplement $\mathbf{u}^\perp$.
3) Da die Form positiv definit ist, gilt Argument 2) auch für alle Lie Unteralgebren von $\mathbf{g}$.
Es folgt, daß $\mathbf{g}$ eine direkte Summe von einfachen bzw. abelschen Summanden ist. □

Seien $(V_1, Y_1, \mathbf{1}_1, \omega_1)$, …, $(V_n, Y_n, \mathbf{1}_n, \omega_n)$ (S)VOAs. Das Tensorprodukt

$$V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$$

kann in natürlicher Weise mit einer (S)VOA-Struktur $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ versehen werden:

$$\begin{aligned} Y(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n, z) &= Y_1(v_1, z) \otimes \cdots \otimes Y_n(v_n, z) \quad (v_i \in V_i), \\ \mathbf{1} &= \mathbf{1}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_n, \\ \omega &= \omega_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_n + \cdots + \mathbf{1}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{n-1} \otimes \omega_n. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Das Tensorprodukt in (1.7) ist dabei in einem $\mathbf{Z}_2$-graduierten Sinne zu verstehen. Analog definiert man das Tensorprodukt für Moduln und Intertwineroperatoren. Wir fassen die wichtigsten Eigenschaften des Tensorproduktes zusammen in

Satz 1.1.13 *Das Tupel $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ ist eine (S)VOA, deren Rang die Summe der Ränge der einzelnen Faktoren ist. Ihre irreduziblen Moduln (wobei alle Eigenwerte der Virasorooperatoren $(L_i)_0$ als rational vorausgesetzt seien) sind gerade die Tensorprodukte der irreduziblen Moduln der einzelnen V_i, $i = 1, \ldots, n$. Besitzen alle Faktoren die Eigenschaften „schön", unitär oder rational, so besitzt diese auch das Tensorprodukt.*

Zum Beweis der (S)VOA-Eigenschaft des Tensorproduktes und der Aussage über die irreduziblen Moduln siehe [FHL93] und [DL93], Kap. 10. Die Rationalität wurde in [DMZ94] bewiesen, die Eigenschaften „schön" und unitär folgen leicht aus der Definition.

Das (äußere) Tensorprodukt „$\otimes$" der (S)VOAs V_1, …, V_n ist von dem (inneren) Tensorpodukt von Moduln M_1, …, M_n einer festen (S)VOA zu unterscheiden, das in Anschluß an Definition 1.1.5 erwähnt wurde.

1.2 Beispiele von (S)VOAs und Struktursätze

Die Angabe einer Basis ist die einfachste Möglichkeit, einen Code oder ein Gitter zu definieren, und umgekehrt kann jeder Code oder jedes Gitter auf diese Weise beschrieben werden. Die gleiche Rolle übernimmt die Cartanmatrix für eine endlichdimensionale halbeinfache komplexe Liealgebra. Wesentlich schwieriger ist die Situation bei (S)VOAs: Es ist keine einfache explizite Beschreibung einer (S)VOA bekannt, aus der sich die Gültigkeit aller Axiome unmittelbar ergäbe (siehe aber [Lien]). Umgekehrt ist auch nicht bekannt, ob *endlich viele* komplexe Zahlen genügen, um alle SVOAs von z.B. festem Rang in einfacher natürlicher Weise zu beschreiben. [1] Alle bisher bekannten Beispiele von „schönen“ rationalen VOAs und ihren Moduln gehen auf vier Beispielklassen zurück, in denen die VOA-Struktur aus einer einfacheren bekannten Struktur konstruiert wird, und dann mit deren Hilfe die Axiome verifiziert werden.

Im einzelnen sind dies die SVOAs, die zu den Höchstgewichtsdarstellungen einer unendlich dimensionalen Cliffordalgebra, einer affinen Kac-Moody Algebra oder der Virasoroalgebra assoziert sind, sowie die SVOAs, die mit Hilfe ganzer Gitter konstruiert werden. Die ersten drei Beispielklassen lassen sich dadurch charakterisieren, daß sie von den Vertexoperatoren zu Vektoren vom Gewicht $\frac{1}{2}$, 1 oder 2 erzeugt werden. Dies wird für die Klassifikationsüberlegungen in dieser Arbeit wichtig sein. Alle weiteren Beispiele sind hieraus mittels des Tensorproduktes [FHL93, DMZ94], der Kommutantenkonstruktion [FZ92] oder mittels Orbifoldkonstruktionen [FLM88, DM95] erhalten worden.

Nach Definition ist jede „schöne“ VOA eine direkte Summe von Moduln über der vom Virasoroelement erzeugten Virasoroalgebra. Eine besonders einfache Struktur haben daher die VOAs, die nur aus einem solchen Modul bestehen, nämlich dem vom Vakuum erzeugten. Sei $L_{c_{p,q}}(0)$ die irreduzible Höchstgewichtsdarstellung der Virasoralgebra vom Höchstgewicht $(c_{p,q},0)$, mit $c_{p,q} = 1-6(p-q)^2/pq$ und $p,\ q \in \{2,3,4,\ldots\}$, $(p,q)=1$; seien $L_{c_{p,q}}(h_{m,n})$ die irreduziblen Darstellungen vom Höchstgewicht $(c_{p,q},h_{n,m})$ mit $h_{n,m} = \frac{(np-mq)^2-(p-q)^2}{4pq}$, $0<m<p$, $0<n<q$. Der Vektorraum $L_{c_{p,q}}(0)$ besitzt eine natürliche VOA-Struktur (s. [FZ92], Abschnitt 4) und die $L_{c_{p,q}}(h_{m,n})$ sind VOA-Moduln hierüber. Der folgende Satz von Wang (s. [Wan93], Satz 4.2) sagt aus, daß die in der Physik als „Minimale Modelle“ bezeichneten VOAs $L_{c_{p,q}}(0)$, rational sind.

Satz 1.2.1 (Virasoro VOAs) *Die VOA $L_{c_{p,q}}(0)$ ist rational, und die $L_{c_{p,q}}(h_{m,n})$, $0<m<p$, $0<n<q$ sind gerade alle irreduziblen Darstellungen von $L_{c_{p,q}}(0)$.*

Die VOAs $L_{c_{p,q}}(0)$ sind für $q=p+1$, d.h. $c_{p,q}=1-\frac{6}{m(m+1)}$, $m\in\{3,4,\ldots\}$, unitär.

Unter gewissen Bedingungen ist der von den Koeffizienten des Vertexoperators eines Elementes vom Gewicht 2 vom Vakuum erzeugte Untervektorraum eine zu einer Virasoroalgebra assoziierte Unter-VOA:

Satz 1.2.2 (Eigenschaft *L-Vir*) *Sei V eine „schöne“ VOA und $a\in V_2$ ein Element vom Gewicht 2, so daß die Koeffizienten a_n des Vertexoperators $Y(a,z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n\, z^{-n-1}$*

[1] Mengentheoretisch ist dies trivial, aber dies ist hier nicht das Problem.

die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

$$a_1 a = 2 \cdot a, \qquad a_2 a = 0 \quad \textit{und} \qquad a_3 a = \frac{d}{2}. \tag{1.8}$$

Dann gilt:

1) Das System $\{a_n \mid n \in \mathbf{Z}\} \cup \{\mathrm{id}_V\}$ *erzeugt eine Virasoroalgebra* Vir_a *unter der Lieklammer.*

2) Der von Vir_a *erzeugte Untervektorraum* $W_a := \mathcal{U}(\mathrm{Vir}_a)\mathbf{1} = \mathcal{U}(\mathrm{Vir}_a^-)\mathbf{1}$ *ist eine Unter-VOA von* V *vom Rang* d *mit Virasoroelement* a.

3) Die Unter-VOA W_a *ist als VOA isomorph zu einem Quotienten von* $M_d := \mathcal{U}(\mathrm{Vir}^-)/\langle L_{-1}\mathbf{1}\rangle$.

Wir bezeichnen die Bedingungen (1.8) an ein Element a als *Eigenschaft L-Vir*.

Beweis:
Zu 1) Aus den Kommutatorrelationen (1.1) und den Beziehungen (1.8), sowie $a(n)a = 0$ für $n \geq 3$, erhält man bei Beachtung der Indexverschiebung $x(n) := x_{n+1}$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
[a(n), a(m)] &= \sum_{i \geq -1} \binom{n+1}{i+1} (a(i)a)(m+n-i) \\
&= (a(-1)a)(m+n+1) + 2(n+1) \cdot a(m+n) + \binom{n+1}{3} \frac{d}{2} \cdot \mathbf{1}(m+n-2).
\end{aligned}$$

Dies vereinfacht sich zu

$$[a(n), a(m)] = \frac{1}{2}\left([a(n), a(m)] - [a(m), a(n)]\right) = (n-m) \cdot a(m+n) + \frac{n^3 - n}{12} \delta_{m+n,0} \cdot \mathrm{id}_V,$$

also gerade zu den Kommutatorrelationen der Virasoroalgebra.

Zu 2) Ein Element $w \in W_a$ ist wegen der Virasororelation und $a_0 \mathbf{1} = 0$ eine Linearkombination von Elementen des Typs $v = a_{-i_1} a_{-i_2} \ldots a_{-i_k} \mathbf{1}$, wobei $i_\nu \geq 0$, $\nu = 1, \ldots, k$. Wir zeigen durch vollständige Induktion über k, daß der Koeffizient v_n des Vertexoperators $Y(v, z)$ eine Linarkombination von Abbildungen $a_{-j_1} a_{-j_2} \ldots a_{-j_l}$, $j_\mu \in \mathbf{Z}$ ist. Für $k = 1$ gilt $(a_{-i_1}\mathbf{1})_n = \binom{-i_1}{-n+1} a_{-i_1+n+1}$; allgemein gilt wegen der Assoziativitätsrelation (1.2)

$$\begin{aligned}
v_n &= (a_{-i_1} a_{-i_2} \ldots a_{-i_k} \mathbf{1})_n \\
&= \sum_{\mu \geq 0} (-1)^\mu \binom{-i_1}{\mu} \left(a_{-i_1-\mu} (a_{-i_2} \ldots a_{-i_k}\mathbf{1})_{n+\mu} - (-1)^{-i_1} (a_{-i_2} \ldots a_{-i_k}\mathbf{1})_{-i_1+n-\mu} a_\mu \right),
\end{aligned} \tag{1.9}$$

d.h. aufgrund der Induktionsannahme hat v_n die verlangte Gestalt. Wir haben damit gezeigt, daß W_a in V abgeschlossen ist, d.h. eine Unter-VOA bildet.

Zu 3) Gleichung (1.9) zeigt auch, daß die VOA-Struktur von W_a schon vollständig durch die Abbildungen a_n bestimmt ist. Andererseits is W_a nach 1) und 2) ein Höchstgewichtsmodul über der Virasoroalgebra vom Höchstgewicht $(d, 0)$ mit $a_0\mathbf{1} = 0$. Er ist daher ein VOA-Quotient des Vermamodulquotienten $\mathcal{U}(\mathrm{Vir}^-)\mathbf{1}/\langle a_0\mathbf{1}\rangle = M_d$, der nach [FZ92], Abschnitt 4, eine VOA-Struktur besitzt. $\square$

Eine wichtige Klasse von SVOAs wird von unendlichdimensionalen Cliffordalgebren erzeugt.

Sei A ein l-dimensionaler Vektorraum zusammen mit einer nichtentarteten Bilinearform $\langle .,. \rangle$. Wir setzen

$$A(\mathbf{Z} + \frac{1}{2}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}+\frac{1}{2}} A(n),$$

wobei $A(n)$ eine Kopie von A vom Gewicht $n \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}$ ist. Auf $A(\mathbf{Z} + \frac{1}{2})$ sei für Elemente $a(n) \in A(n)$, $b(m) \in A(m)$ und m, $n \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}$ die Form $\langle .,. \rangle$ durch $\langle a(n), b(m)\rangle = \langle a, b\rangle \delta_{n,-m}$ fortgesetzt. Die Untervektorräume $A^{\pm}(\mathbf{Z} + \frac{1}{2}) = \bigoplus_{0<n\in\mathbf{Z}+\frac{1}{2}} A(\pm n)$ sind dann maximale isotrope Teilräume. Bezüglich dieser Bilinearform erzeugt $A(\mathbf{Z} + \frac{1}{2})$ eine unendlich dimensionale Cliffordalgebra $\mathbf{Cliff}(\mathbf{Z} + \frac{1}{2})$. Sei $\mathcal{J}$ das von $A^+(\mathbf{Z} + \frac{1}{2})$ erzeugte Ideal in $\mathbf{Cliff}(\mathbf{Z} + \frac{1}{2})$. Der Vektorraum

$$V_{\mathrm{Fermi},l} := \mathbf{Cliff}(\mathbf{Z} + \frac{1}{2})/\mathcal{J} = \Lambda^*(A^-(\mathbf{Z} + \frac{1}{2}))\,\mathbf{1} = \bigotimes_{0<n\in\mathbf{Z}+\frac{1}{2}} \Lambda^*(A(-n))\,\mathbf{1}$$

ist dann ein irreduzibler $\mathbf{Cliff}(\mathbf{Z} + \frac{1}{2})$-Modul. Tatsächlich besitzt V sehr viel mehr Struktur. Wir fassen dies zusammen in

Satz 1.2.3 (Clifford SVOAs) *Der Vektorraum $V_{\mathrm{Fermi},l}$ besitzt die Struktur einer „schönen“ unitären SVOA vom Rang $\frac{l}{2}$. Die Koeffizienten a_n des zu $a \in V_{1/2} \cong A$ gehörigen Vertexoperators $Y(a, z)$ operieren auf V gerade wie $a(n)$ durch die Cliffordmultiplikation. Die SVOA $V_{\mathrm{Fermi},l}$ ist rational und besitzt genau eine irreduzible Darstellung nämlich V selbst.*

Für diese Konstruktion vgl. [Tsu90, FFR91] und [KW94], Abschnitt 4. In den ersten beiden Referenzen wird l als gerade vorausgesetzt, dies ist aber eine nicht notwendige Einschränkung. In der Physik werden diese SVOAs als „freie Fermionen“ bezeichnet.

Die Koeffizienten der Vertexoperatoren zu Elementen aus $V_{1/2}$ einer SVOA V bilden ganz allgemein eine unendlich dimensionale Cliffordalgebra. Für die von ihnen erzeugte Unter-SVOA gilt (vgl. Prop. 6.2 [Tam95b], der Beweis dort bleibt auch für ungerade l gültig):

Satz 1.2.4 (Eigenschaft *L-Clifford***)** *Sei V eine „schöne“ unitäre SVOA mit* $\dim V_{1/2} = l$. *Dann ist die von $V_{1/2}$ erzeugte Unter-SVOA isomorph zu $V_{\mathrm{Fermi},l}$.*

Die SVOA $V_{\mathrm{Fermi}} := V_{\mathrm{Fermi},1}$ hat den Rang $\frac{1}{2}$ und die gerade Unter-VOA ist $L_{1/2}(0)$. Als $L_{1/2}(0)$-Modul besteht die Zerlegung $V_{\mathrm{Fermi}} = L_{1/2}(0) \oplus L_{1/2}(\frac{1}{2})$.

Eine dritte Klasse sind die zu affinen Kac-Moody Algebren assozierten und in der Physik als „WZW-Modelle“ bekannten VOAs. Sei $\mathbf{g}$ eine einfache komplexe Liealgebra und

$$\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{g} \otimes \mathbf{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbf{C} \cdot c = \hat{\mathbf{g}}^{+} \oplus \mathbf{g} \oplus \hat{\mathbf{g}}^{-} \oplus \mathbf{C} \cdot c$$

die zugehörige affine Liealgebra, sei $\{\Lambda_0, \ldots, \Lambda_n\}$ ein System von fundamentalen Gewichten von $\hat{\mathbf{g}}$, so daß $\{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n\}$ fundamentale Gewichte für $\mathbf{g}$ sind. Für eine Höchstgewichtsdarstellung V_λ von $\mathbf{g}$ mit Höchstgewicht $\lambda \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\, \Lambda_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}_{\geq 0}\, \Lambda_n$ und ein $k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ bezeichnen wir mit $\hat{V}_{k\Lambda_0+\lambda} = \mathcal{U}(\hat{\mathbf{g}}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathbf{g} \oplus \hat{\mathbf{g}}^{-} \oplus \mathbf{C} \cdot c)} V_\lambda$ den Vermamodul vom Höchstgewicht $k\Lambda_0 + \lambda$. Er enthält einen maximalen eindeutigen Untermodul $I(k, \lambda)$. Sei $L_{k\Lambda_0+\lambda}$ der Quotientenmodul $\hat{V}_{k\Lambda_0+\lambda}/I(k, \lambda)$. Bezeichne schließlich mit $\check{g}$ die duale Coxeterzahl, mit θ die längste Wurzel von $\mathbf{g}$ und schreibe $(\,.\,,\,.\,)$ für die invariante Bilinearform auf $\mathbf{g}$, die so normiert ist, daß 2 die Quadratlänge einer langen Wurzel ist.

Satz 1.2.5 (Kac-Moody VOAs) *Der $\hat{\mathbf{g}}$-Modul $L_{k\Lambda_0}$ besitzt eine natürliche VOA-Struktur vom Rang $\frac{k \cdot \dim \mathbf{g}}{k + \check{g}}$. Die so erhaltene VOA ist „schön“, unitär und rational und besitzt als irreduzible Moduln gerade die irreduziblen integrablen Höchstgewichtsdarstellungen $\{L_{k\Lambda_0+\lambda} \mid (\lambda, \theta) \leq k\}$ von $\hat{\mathbf{g}}$ der Stufe k.*

Zu jedem ganzen positiv definiten Gitter $L \subset \mathbf{R}^n$ kann eine SVOA V_L assoziiert werden. Dem geraden Untergitter $L_0 \subset L$ entspricht dabei die gerade Unter-VOA $V_{(0)} = V_{L_0}$, d.h. V_L ist eine VOA, falls L gerade. Bezeichne mit $L^* = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle x, y\rangle \in \mathbf{Z} \text{ für alle } y \in L\}$ das zu L duale Gitter.

Satz 1.2.6 (Gitter-SVOAs) *Die Gitter-SVOA V_L ist eine „schöne“ unitäre rationale SVOA vom Rang n, deren irreduzible Moduln den Nebenklassen L^*/L entsprechen. Die Fusionsalgebra ist isomorph zum Gruppenring $\mathbf{Z}[L^*/L]$.*

Die VOA-Struktur war in [FLM88] (gerade Gitter) und [DL93] (ungerade Gitter) konstruiert worden. Die irreduziblen Moduln waren im geraden Fall in [Don93] bestimmt worden. Der etwas allgemeinere Fall von beliebigen ganzen Gittern und deren assozierten SVOAs ist zumindest in der physikalischen Literatur ebenfalls untersucht worden (vgl. z.B. [God89]). Dort werden diese SVOAs durch die Quantisierung eines „Strings auf dem Torus $\mathbf{R}^n/L$“ konstruiert.

Es besteht der folgende Zusammenhang zwischen Gitter-VOAs und den zu affinen Kac-Moody Algebren gehörigen VOAs (s. [FLM88], Kapitel 7):

Satz 1.2.7 *Die zu den Wurzelgittern der Liealgebren vom Typ A_n, D_n $(n \geq 1)$ und E_n $(n = 6, 7, 8)$ gehörigen VOAs sind isomorph zu den VOAs, die zu den fundamentalen Stufe 1 Darstellungen der entsprechenden affinen Kac-Moody Algebren assoziiert sind.*

Die zum geraden Gitter $L = \sqrt{2k}\,\mathbf{Z}$; $k \in \mathbf{N}$, $k > 1$ assoziierte VOA kann als die zu der abelschen Liealgebra $\mathrm{Lie}(\mathbf{U}(1)) =: \mathbf{t}$ assozierte VOA bei Stufe k aufgefaßt werden.

Die Koeffizienten von Vertexoperatoren zu Elementen vom Gewicht 1 bilden eine affine Liealgebra. Zusammen mit Lemma 1.1.12 ist daher zu vermuten, daß *unitäre* „schöne“ rationale VOAs die folgende Eigenschaft besitzen:

Definition 1.2.8 (Eigenschaft *L-Lie***)** *Sei V eine VOA, $\tilde{V}_1$ die von V_1 erzeugte Unter-VOA und $W = \mathrm{Com}_V(\tilde{V}_1)$ die Kommutante von $\tilde{V}_1$ in V. Wir sagen: V besitzt die Eigenschaft L-Lie, wenn gilt:*

a) W ist eine rationale Unter-VOA von V.

b) $\tilde{V}_1$ ist ein Tensorprodukt von Kac-Moody VOAs $L^{\mathbf{g}_i}_{k_i\Lambda_0^{(i)}}$, wobei die $\mathbf{g}_i$ die einfachen bzw. abelschen Summanden der reduktiven Liealgebra $V_1 = \mathbf{g} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{g}_i$ sind.

Hat eine VOA V die Eigenschaft *L-Lie*, so ist sie eine direkte Summe von Moduln der rationalen Unter-VOA $\tilde{V}_1 \otimes W$. Eine Schwierigkeit *L-Lie* für beliebige unitäre rationale VOAs zu beweisen, ist u.a. die geforderte Rationalität von W.

Schließlich sei noch der Mondscheinmodul $V^\natural$ aufgeführt. Er wurde in [FLM88] konstruiert, um Teile des „Mondschein des Monsters“ [CN79] zu erklären, und war gleichzeitig das Beispiel, welches in der Mathematik die Definition der VOA-Struktur motivierte [Bor86, FLM84]. Zusätzlich ist er das erste Beispiel einer Orbifold-VOA. Wir notieren das Hauptresultat aus [FLM88] — mit den Bezeichnungen wie dort — als

Satz 1.2.9 (Mondscheinmodul $V^\natural$) *Der als $\mathbf{Z}_2$-Orbifold der Leechgitter-VOA konstruierte Mondscheinmodul $V^\natural = V^+_{\Lambda_{24}} \oplus (V^T_{\Lambda_{24}})^+$ ist eine unitäre VOA vom Rang 24 mit dem Monster als Automorphismengruppe.*

1.3 Modulgruppen und Modulfunktionen

Wir führen die in dieser Arbeit verwendeten Notationen und elementaren Resultate im Zusammenhang mit Modulfunktionen ein. Dies, sowie die meisten der benötigten expliziten Reihenentwicklungen finden sich in größerer Ausführlichkeit in Anhang I von [HBJ92].

Sei $\mathbf{H} = \{\tau \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ die obere Halbebene der komplexen Zahlen. Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ operiert auf $\mathbf{H}$ vermöge

$$(A, \tau) \mapsto A\tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \qquad \text{für } A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \text{ und } \tau \in \mathbf{H}.$$

Eine *Kongruenzuntergruppe* Γ ist eine Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, die eine Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N) := \{A \in \Gamma \mid A \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \pmod N\}$ für ein $N \in \mathbf{N}$ enthält. Die Spitzen von Γ sind die Bahnen der Operation von Γ auf $\mathbf{P}_1(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{P}_1(\mathbf{R})$. Der Bahnenraum $\mathbf{H}/\Gamma$ kann durch die Hinzunahme der Spitzen von Γ zu einer kompakten Riemannschen Fläche $\overline{\mathbf{H}/\Gamma}$ erweitert werden.

Die Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ auf $\mathbf{H}$ induziert eine Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ auf den Funktionen auf $\mathbf{H}$:

$$f(\tau) \mapsto f\,|_A\,(\tau) := f(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}) \qquad \text{für ein } f : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{C} \text{ und } A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}).$$

Eine Modulfunktion zur Gruppe Γ ist eine unter der $|$-Operation invariante meromorphe Funktion auf $\mathbf{H}$, die in den Spitzen eine Fourierreihenentwicklung besitzt und dort höchstens einen Pol hat. Dies sind gerade die meromorphen Funktionen $\mathcal{M}(\overline{\mathbf{H}/\Gamma})$ auf der Fläche $\overline{\mathbf{H}/\Gamma}$.

Im Zusammenhang mit selbstdualen SVOAs sind wir insbesondere an $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ selbst und der Thetagruppe $\Gamma_\theta := \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid A \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \text{oder} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \pmod 2\}$ interessiert.

Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ wird erzeugt von den beiden Elementen $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Sie ist genauer das freie Produkt von S und T modulo der Relationen $S^4 = (ST)^6 = 1$ und $S^2 = (ST)^3$. Die inhomogene Gruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})/\langle \pm 1 \rangle$ ist das freie Produkt der ebenfalls wieder mit S und T bezeichneten Bildern von S und T in $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ zusammen mit den beiden Relationen $S^2 = 1$ und $(ST)^3 = 1$.

Die Fläche $\overline{\mathbf{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})}$ hat eine mit ∞ bezeichnete Spitze und ist vom Geschlecht 0. Der Körper der meromorphen Funktionen von $\overline{\mathbf{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})}$ ist daher ein rationaler Funktionenkörper. Die Modulfunktion $j = \frac{E_4^3}{\Delta}$ zu $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ ist holomorph in $\mathbf{H}$ und besitzt in der Spitze ∞ (lokale Koordinate $q = e^{2\pi i\tau}$) die Fourierreihenentwicklung

$$j = q^{-1} + 744 + 196884\, q + 21493760\, q^2 + \cdots, \tag{1.10}$$

d.h. es gilt $\mathcal{M}(\overline{\mathbf{H}/\Gamma}) \cong \mathbf{C}(j)$. Hierbei ist $E_4 = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)\, q^n$ eine Eisensteinreihe vom Gewicht 4 zu $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, und die Diskriminante Δ ist die 24-te Potenz der η-Funktion, die die Produktentwicklung

$$\eta = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

besitzt.

Die Thetagruppe Γ_θ (vgl. [Ran77]) wird erzeugt von S und T^2. Sie ist das freie Produkt von S und T^2 modulo der Relationen $S^4 = 1$ und $S^2T^2 = T^2S^2$. Die inhomogene Thetagruppe $\overline{\Gamma}_\theta = \Gamma_\theta/\langle \pm 1\rangle \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ ist das freie Produkt von S und T^2 zusammen mit der Relation $S^2 = 1$. Die Kongruenzuntergruppe Γ_θ hat Index 3 in $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, und die drei Nebenklassen $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})/\Gamma_\theta$ werden repräsentiert von 1, T und ST. Die Fläche $\overline{\mathbf{H}/\Gamma_\theta}$ hat ebenfalls das Geschlecht 0 und besitzt die beiden Spitzen 1 und ∞. Die Funktion $j_\theta = \left(\frac{\Theta_{\mathbf{Z}}}{\eta}\right)^{12}$, wobei $\Theta_{\mathbf{Z}} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} q^{\frac{1}{2}n^2}$ die Thetareihe zum Gitter $\mathbf{Z}$ ist, ist eine Modulfunktion zu Γ_θ. Sie hat in der Spitze ∞ (lokale Koordinate $q^{\frac{1}{2}}$) die Produktentwicklung

$$j_\theta = \left(\frac{\eta^2(\tau)}{\eta(2\tau)\eta(\tau/2)}\right)^{24} = q^{-\frac{1}{2}}\prod_{n=0}^{\infty}(1+q^{n+\frac{1}{2}})^{24}, \tag{1.11}$$

hat dort also einen einfachen Pol. In der Spitze 1 hat sie die Entwicklung

$$j_\theta = -2^{12}\left(\frac{\eta(2\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{24} = -2^{12}\cdot q\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)^{24}, \tag{1.12}$$

d.h. dort hat sie eine einfache Nullstelle. Aufgrund der Produktentwicklung ist sie eine in $\mathbf{H}$ holomorphe Funktion, und es gilt $\mathcal{M}(\overline{\mathbf{H}/\Gamma_\theta}) \cong \mathbf{C}(j_\theta)$.

Mit $\Theta_L = \sum_{x\in L} q^{\frac{1}{2}\langle x,x\rangle}$ bezeichnen wir die Thetareihe eines ganzen Gitters $L \subset \mathbf{R}^n$. Sie ist eine Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2}$ zur Thetagruppe Γ_θ.

Wir werden eine Modulfunktion oft mit ihrer Reihenentwicklung in einer Spitze identifizieren.

1.4 (S)VOAs bei Geschlecht Eins

Die Beschreibung einer konformen Quantenfeldtheorie für Riemannsche Flächen von höherem Geschlecht sollte sich aus der Beschreibung bei Geschlecht Null ergeben, denn Flächen größeren Geschlechtes lassen sich durch Zusammenkleben der dreifach punktierten Zahlenkugel erhalten (vgl. [MS89]).

In diesem Abschnitt stellen wir die Resultate zusammen, die sich aus der Theorie der Vertexoperator-Algebren (mathematische Beschreibung von CFT bei Geschlecht 0) für Riemansche Flächen bei Geschlecht 1 (Tori) ergeben. Die wesentlichen Sätze finden sich in der Arbeit [Zhu90] von Zhu. Wir formulieren weiter die entsprechenden Resultate für SVOAs.

Sei V eine „schöne" rationale VOA vom Rang c und M ein irreduzibler V-Modul vom konformen Gewicht h. Für ein n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ von homogenen Elementen $a_i \in V$ definiert die formale q-Spur

$$F_M((a_1,x_1),(a_2,x_2),\ldots,(a_n,x_n),q) :=$$
$$x_1{}^{\deg a_1}\cdot\ldots\cdot x_2{}^{\deg a_n}\,\mathrm{tr}\,|_M\, Y(a_1,x_1)Y(a_2,x_2)\ldots Y(a_n,x_n)q^{L_0} \qquad (1.13)$$

ein Element in $q^h\mathbf{C}[[x_1,x_1^{-1},x_2,x_2^{-1},\ldots,x_n,x_n^{-1},q]]$.
Die Reihe $F_M((a_1,x_1),(a_2,x_2),\ldots,(a_n,x_n),q)$ konvergiert nach Satz 4.2.1 aus [Zhu90] zu einer in dem Gebiet

$$\{(x_1,x_2,\ldots,x_n,q)\mid 1>|x_1|>\cdots|x_n|>|q|\}$$

holomorphen Funktion, und der Limes kann zu einer in dem Gebiet

$$\{(x_1,x_2,\ldots,x_n,q)\mid x_i\neq 0, |q|<1\}$$

meromorphen Funktion $\widetilde{F}_M$ fortgesetzt werden. Wir ersetzen die Variable x_i durch $e^{2\pi i z_i}$, q durch $e^{2\pi i\tau}$ und bezeichnen

$$T_M((a_1,z_1),\ldots,(a_n,z_n),\tau) = q^{-\frac{c}{24}}\widetilde{F}_M((a_1,e^{2\pi i z_1}),\ldots,(a_n,e^{2\pi i z_n}),e^{2\pi i\tau}) \qquad (1.14)$$

als die *n-Punkt-Korrelationsfunktion der Vertexoperatoren $Y(a_1,x_1)$, …, $Y(a_n,x_n)$ auf dem Torus mit Parameter τ.* Die Funktion $T_M((a_1,z_1),(a_2,z_2),\ldots,(a_n,z_n),\tau)$ ist nach Satz 4.5.1 aus [Zhu90] eine in jeder Variablen z_i doppeltperiodische Funktion mit den Perioden 1 und τ, und die einzigen möglichen Singularitäten sind die Stellen $z_i = z_j + m + k\tau$ ($i\neq j$; m, $k\in\mathbf{Z}$). Weiter hängt die Funktion nicht von der Reihenfolge der Vertexoperatoren $Y(a_i,x_i)$ ab, d.h. für jede Permutation $\sigma\in S_n$ gilt

$$T_M((a_1,z_1),(a_2,z_2),\ldots,(a_n,z_n),\tau) = T_M((a_{\sigma(1)},z_{\sigma(1)}),(a_{\sigma(2)},z_{\sigma(2)}),\ldots,(a_{\sigma(n)},z_{\sigma(n)}),\tau).$$

Definition 1.4.1 *Sei V eine rationale „schöne“ VOA und M_1, …, M_m eine vollständige Liste von irreduziblen V-Moduln. Den $\mathbf{C}$-Vektorraum B, der von den m Funktionen $T_{M_i}:\bigcup_{n=1}^{\infty}((V\times\mathbf{C})^n\times\mathbf{H})\longrightarrow\mathbf{C}$,$(i=1,\ldots,m)$ aufgespannt wird, bezeichnen wir als den* konformen Block auf dem Torus.

Anmerkung: Unsere Definition des konformen Blockes auf dem Torus stimmt mit derjenigen in [Zhu90] nach den dort bewiesenen Sätzen überein. Insbesondere sind die m Funktionen T_{M_i} linear unabhängig, d.h. B ist ein m-dimensionaler $\mathbf{C}$-Vektorraum mit der ausgezeichneten Basis $\{T_{M_i}\}$. Das Hauptresultat aus [Zhu90] (Satz 5.3.2) ist:

Satz 1.4.2 (Zhu) *Es existiert eine Darstellung $\rho:\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})\longrightarrow\mathrm{End}(B)$ der Modulgruppe, so daß für Virasorohöchstgewichtsvektoren a_1, a_2, …, a_n und $A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ die n-Punkt-Korrelationsfunktionen das folgende Transformationsverhalten besitzen:*

$$T_{M_i}((a_1,\frac{z_1}{c\tau+d}),(a_2,\frac{z_2}{c\tau+d}),\ldots,(a_n,\frac{z_n}{c\tau+d}),\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) =$$

$$(c\tau+d)^{\sum_{i=1}^n \deg a_i} \sum_{j=1}^m \rho(A)_{ij} T_{M_j}((a_1,z_1),(a_2,z_2),\ldots,(a_n,z_n),\tau).$$

Hierbei ist $(\rho(A)_{ij})$ die $m\times m$-Matrix der in der Basis $\{T_{M_i}\}$ geschriebenen Abbildung $\rho(A)\in \mathrm{End}(B)$.

Der Vektor $\{T_{M_i}((a_1,z_1),\ldots,(a_n,z_n),\tau)\}$ kann also als eine vektorwertige meromorphe Jacobiform vom Gewicht $\sum_{i=1}^n \deg a_i$ zur vollen Modulgruppe $\mathbf{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ aufgefaßt werden (vgl. [EZ85]).

Für $n=1$ hat die in z_1 elliptische Funktion $T_M((a_1,z_1),\tau)$ keine Polstellen, ist also konstant bzgl. z_1. Wir bezeichnen

$$\chi_M := T_M((\mathbf{1},z_1),\tau) = q^{-\frac{c}{24}} \sum_{n=1}^\infty \dim M_n\, q^n = \mathrm{tr}|_M\, q^{L_0-\frac{c}{24}}$$

als den *(konformen) Charakter* eines V-Moduls M. Er ist eine in $\tau\in\mathbf{H}$ holomorphe Funktion.

Korollar 1.4.3 (Zhu) *Die natürliche Projektion $\pi: B \longrightarrow \overline{B} := \mathrm{Span}\{\chi_{M_i}\}$ induziert eine Darstellung*

$$\overline{\rho}: \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{End}(\overline{B})$$

der inhomogenen Modulgruppe auf dem Vektorraum der konformen Charaktere.

Im allgemeinen ist π nicht injektiv, z.B. gilt für ein M_i und seinen dualen Modul $M_i^* = M_{i'}$ die Beziehung $\chi_{M_i} = \chi_{M_{i'}}$, aber M_i und $M_{i'}$ sind nicht notwendig isomorph. Wir schreiben für ein Element $A\in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ kurz $\widetilde{A} = \rho(A)$ und $\overline{A} = \overline{\rho}(A)$.

Verlinde hat in [Ver88] den folgenden Zusammenhang zwischen der Fusionsalgebra und der Darstellung ρ aus Satz 1.4.2 hergestellt:

Vermutung 1.4.4 (Verlindeformel) *Die Dimensionen N_{ij}^k der Intertwinerräume einer einfachen „schönen" rationalen VOA V mit irreduziblen Moduln $M_1 = V$, M_2, …, M_m lassen sich durch die $m\times m$-Matrix $\widetilde{S} = \rho(S)$, $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ ausdrücken:*

$$N_{ij}^k = \sum_{n=1}^m \frac{\widetilde{S}_{in}\widetilde{S}_{jn}\widetilde{S}_{nk}^{-1}}{\widetilde{S}_{1n}}.$$

Für beliebige „schöne" rationale VOAs ist die Verlindeformel bisher noch nicht bewiesen. Die Definiton des Raumes der Vakua in [Zhu94] für Riemannsche Flächen höheren Geschlechtes erlaubt die allgemeine Formulierung der Verlindeformel im Rahmen von VOAs.

Analog zu VOAs lassen sich auch für SVOAs die Korrelationsfunktionen auf dem Torus definieren und entsprechende Resultate erzielen. Wir werden daher hier nur die Aussagen formulieren und an einigen Stellen etwas zur Beweismethode sagen. Die nachfolgenden Kapitel sind auch unabhängig von diesen Überlegungen, falls in der Definiton der SVOA zusätzlich das entsprechende Modultransformationsverhalten der Charaktere gefordert wird.

Die Definiton der n-Punkt Korrelationsfunktion auf dem Torus ist für eine SVOA $V = V_{(0)} \oplus V_{(1)}$ die gleiche wie in (1.13) und (1.14), allerdings folgen nur für $a_1, \ldots, a_n \in V_{(0)}$ die Konvergenz und die analytische Fortsetzbarkeit direkt aus dem Resultat für VOAs. Für beliebige $a_i \in V$ ist $T_M((a_1, z_1), (a_2, z_2), \ldots, (a_n, z_n), \tau))$ eine in den Variablen z_i doppeltperiodische Funktion mit den beiden Perioden 1 und 2τ. Beim Übergang $z_i \mapsto z_i + \tau$ transformiert sich T_M mit dem Vorzeichen $(-1)^{|a_i|}$. Für eine beliebige Permutation $\sigma \in S_n$ gilt

$$T_M((a_1, z_1), \ldots, (a_n, z_n), \tau) = (-1)^w \cdot T_M((a_{\sigma(1)}, z_{\sigma(1)}), \ldots, (a_{\sigma(n)}, z_{\sigma(n)}), \tau),$$

wobei w die Anzahl der Vertauschungen von ungeraden Elementen $a_i \in V_{(1)}$ in σ ist. Entsprechend dem konformen Block definiert man den *superkonformen Block:*

Definition 1.4.5 *Sei V eine rationale „schöne“ SVOA und sei $M_1, \ldots, M_m$ eine vollständige Liste von irreduziblen V-Moduln. Der* superkonforme Block auf dem Torus *ist der von den m Funktionen $T_{M_i} : \bigcup_{n=1}^{\infty}((V \times \mathbf{C})^n \times \mathbf{H}) \longrightarrow \mathbf{C}, (i = 1, \ldots, m)$ aufgespannte $\mathbf{C}$-Vektorraum SB.*

Die „Super-Erweiterung“ von Satz 1.4.2 ist

Satz 1.4.6 *Es existiert eine Darstellung $\rho : \Gamma_\theta \longrightarrow \mathrm{End}(SB)$ der Thetagruppe, so daß für Virasorohöchstgewichtsvektoren $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_\theta$ die n-Punkt-Korrelationsfunktionen das folgende Transformationsverhalten besitzen:*

$$T_{M_i}((a_1, \frac{z_1}{c\tau + d}), (a_2, \frac{z_2}{c\tau + d}), \ldots, (a_n, \frac{z_n}{c\tau + d}), \frac{a\tau + b}{c\tau + d}) =$$

$$(c\tau + d)^{\sum_{i=1}^{n} \deg a_i} \sum_{j=1}^{n} \rho(A)_{ij} T_{M_j}((a_1, z_1), (a_2, z_2), \ldots, (a_n, z_n), \tau).$$

Hierbei ist $(\rho(A)_{ij})$ die $m \times m$-Matrix der in der Basis $\{T_{M_i}\}$ geschriebenen Abbildung $\rho(A) \in \mathrm{End}(SB)$.

Für die Charaktere gilt das

Korollar 1.4.7 *Die natürliche Projektion $\pi : SB \longrightarrow \overline{SB} := \mathrm{Span}\{\chi_{M_i}\}$ induziert eine Darstellung*

$$\overline{\rho} : \overline{\Gamma}_\theta \longrightarrow \mathrm{End}(\overline{B})$$

der inhomogenen Thetagruppe auf dem Vektorraum der konformen Charaktere.

Anmerkung: Vertexoperatoren $Y(a,x)$ zu Virasorohöchstgewichtsvektoren $a \in V_k$ transformieren sich wie Schnitte in der $2k$-ten Tensorpotenz des Spinorbündels über dem Torus $\mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau)$ zu der durch $\kappa : (1,\tau) \mapsto (1,-1)$ gegebenen Spin-Struktur. Zwei Tori mit dieser Spin-Struktur sind genau dann konform äquivalent, wenn die Modulparameter durch Γ_θ ineinander übergeführt werden können. Um zu einer Darstellung von $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ zu gelangen, muß man alle drei nichttrivialen (ungeraden) Spin-Strukturen betrachten und den superkonformen Block SB um die Korrelationsfunktionen von getwisteten V-Moduln erweitern (vgl. S. 39). Korrelationsfunktionen zur geraden Spin-Struktur liefern ebenfalls eine $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-Darstellung.

Beweis von Satz 1.4.6 (grobe Skizze): Kac und Wang haben in [KW94] das Analogon der Zhu'schen Algebra $A(V)$ für SVOAs definiert und gezeigt, daß eine $1:1$-Korrespondenz zwischen irreduziblen $A(V)$-Moduln und irreduziblen V-Moduln besteht. Dies ist der „Geschlecht 0 Teil“.

Für den „Geschlecht 1 Teil“ kann man ebenfalls analog zu der Arbeit von Zhu [Zhu90] vorgehen und zuerst den superkonformen Block auf dem Torus „axiomatisch“ definieren und dann zeigen:
(1) Die Korrelationsfunktionen auf dem Torus liegen in dem superkonformen Block.
(2) Bei Transformationen mit Γ_θ bleibt man im superkonformen Block.
(3) Ein Element im superkonformen Block läßt sich als Spur auf $A(V)$ ausdrücken.

Dazu muß man zeigen, daß man wegen der Endlichkeitsbedingung $\mathbf{C}_2$ eine Differentialgleichung erhält, deren Koeffizienten elliptische Funktionen zu dem Paar Kurve mit festem 2-Teilungspunkt sind. $\square$

Man erhält leicht die folgenden Eigenschaften des (super)konformen Blockes bei VOA-kategoriellen Konstruktionen.

Seien V_1 und V_2 zwei „schöne“ rationale (S)VOAs. Für den als $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-Modul (bzw. Γ_θ-Modul) aufgefaßten (super)konformen Block des Tensorproduktes $V_1 \otimes V_2$ gilt

$$(S)B_{V_1 \otimes V_2} \cong (S)B_{V_1} \otimes (S)B_{V_2}.$$

Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.1.13 und Definition 1.4.1 bzw. 1.4.5.

Eine Einbettung $i : U \subset V$ von zwei „schönen“ rationalen (S)VOAs U und V induziert die natürliche Abbildung $i^* : (S)B_V \longrightarrow (S)B_U$ zwischen $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$- (bzw. Γ_θ-) Moduln, die vermutlich injektiv ist. Schließlich liefert die Inklusion $i : W_{(0)} \subset W$ der Unter-VOA $W_{(0)}$ in einer „schönen“ rationalen SVOA W das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_\theta \times SB_W & \stackrel{\nu \times i^*}{\longrightarrow} & \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \times B_{W_{(0)}} \\ \rho \downarrow & & \rho \downarrow \\ SB_W & \stackrel{i^*}{\longrightarrow} & B_{W_{(0)}}. \end{array}$$

Hierbei ist ν die Inklusion $\Gamma_\theta \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, und $i^* : SB_W \longrightarrow B_{W_{(0)}}$ bildet die Funktion $T_M : \bigcup_{n=1}^\infty((W \times \mathbf{C})^n, \mathbf{H}) \longrightarrow \mathbf{C}$ auf die Einschränkung $i^*(T_M) = T_{M|i} \circ i : \bigcup_{n=1}^\infty((W_{(0)} \times \mathbf{C})^n, \mathbf{H}) \longrightarrow \mathbf{C}$ ab. Da $W_{(0)}$ auch rational ist, zerlegt sich $M|i$ als direkte Summe von irreduziblen $W_{(0)}$-Moduln.

Alle drei Konstruktionen sind mit der Projektion π auf die konformen Charaktere verträglich.

Wir notieren noch die konformen Charaktere der wichtigsten Beispiele aus dem vorletzten Abschnitt. Diese ergeben sich aus der Definition der der (S)VOA und ihren Moduln unterliegenden Vektorräume.

Die Charaktere der 3 irreduziblen $L_{1/2}(0)$-Moduln sind:

$$\begin{aligned}
\chi_{L_{1/2}(0)} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\Theta_{\mathbf{Z}}}{\eta}} + \sqrt{\frac{\Theta_{\mathbf{Z}}}{\eta}}\,|_T\right) = q^{-\frac{1}{48}}(1 + q^2 + q^3 + +2\,q^4 + 2\,q^5 + \cdots),\\
\chi_{L_{1/2}(\frac{1}{2})} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\Theta_{\mathbf{Z}}}{\eta}} - \sqrt{\frac{\Theta_{\mathbf{Z}}}{\eta}}\,|_T\right) = q^{-\frac{1}{48}}(q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{3}{2}} + q^{\frac{5}{2}} + q^{\frac{7}{2}} + 2\,q^{\frac{9}{2}} + 2\,q^{\frac{11}{2}} + \cdots),\\
\chi_{L_{1/2}(\frac{1}{16})} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\Theta_{\mathbf{Z}+\frac{1}{2}}}{\eta}} = q^{-\frac{1}{48}}(q^{\frac{1}{16}} + q^{\frac{17}{16}} + q^{\frac{33}{16}} + 2\,q^{\frac{49}{16}} + 2\,q^{\frac{65}{16}} + + \cdots).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Für den Charakter der Fermi-SVOA $V_{\mathrm{Fermi}} \cong L_{1/2}(0) \oplus L_{1/2}(\frac{1}{2})$ ergibt sich somit:

$$\chi_{V_{\mathrm{Fermi}}} = \sqrt{\frac{\Theta_{\mathbf{Z}}}{\eta}} = \sqrt[24]{j_\theta}. \tag{1.16}$$

Die Charaktere der irreduziblen Moduln $M_{L+[i]}$, $[i] \in L^*/L$ einer Gitter-(S)VOA V_L zum ganzen Gitter $L \subset \mathbf{R}^n$ sind

$$\chi_{M_{L+[i]}} = \frac{\Theta_{L+[i]}}{\eta^n}.$$

Für die Moduln $V^{\mathbf{g}}_{k\Lambda_0+\lambda}$ zum Höchstgewicht λ der zu einer Kac-Moody Algebra $\hat{\mathbf{g}}$ assoziierten VOA bei Stufe k ergibt sich der Charakter aus der Weil-Kac Charakterformel (s. [Kac90], Prop. 10.10, Bezeichnungen wie dort):

$$\chi_{V^{\mathbf{g}}_{k\Lambda_0+\lambda}} = q^{-\frac{c}{24}} \prod_{\alpha\in\Delta_+^\vee} \left(\frac{1-q^{\langle k\Lambda_0+\lambda+\rho,\alpha\rangle}}{1-q^{\langle\rho,\alpha\rangle}}\right)^{\mathrm{mult}\,\alpha}.$$

Schließlich erhält man für den Charakter des Mondscheinmoduls $V^\natural$ (s. [FLM88], (10.5.55)):

$$\chi_{V^\natural} = j(q) - 744 = J(q).$$

Chapter 2

Selbstduale Vertexoperator-Superalgebren

Für selbstduale gerade und ungerade Codes erhält man aus der MacWilliams Identität [MS77] mit Hilfe von Invariantentheorie eine Beschreibung des Gewichtszählerpolynomes des Codes. Für selbstduale gerade und ungerade Gitter ergibt sich aus der Jacobi-Umkehrformel und der Theorie der Modulformen eine Beschreibung der Thetareihe des Gitters. In diesem Kapitel geben wir eine analoge Beschreibung für den Charakter von selbstdualen VOAs und SVOAs. Hierzu benutzen wir einerseits den Satz von Zhu (1.4.2) bzw. seine Verallgemeinerung 1.4.6 für SVOAs und andererseits elementare Eigenschaften von meromorphen Funktionen. Für SVOAs stellt sich die Bedingung unitär als wichtig heraus. Ein Ganzzahligkeitsargument erlaubt es uns weiter zu zeigen, daß der Rang einer selbstdualen SVOA ein Element von $\frac{1}{2}\mathbf{Z}$ ist, was schon in [Ver88] vermutet worden war.

Selbstduale Codes und Gitter besitzen viele interessante Eigenschaften, so daß auch die Klassifkation von selbstdualen VOAs natürlich erscheint. Die Klassifikation der 24-dimensionalen selbstdualen geraden Gitter steht in Verbindung mit den verschiedenen Typen von tiefen Löchern im Leechgitter [CS93], Kapitel 23 und 24, und den Bahnen von lichtartigen Vektoren im 26-dimensionalen selbstdualen Lorentzgitter unter der Operation der Automorphismengruppe [CS93], Kapitel 26 und 27. Wir geben hier für Ränge $c \leq 24$ eine Liste [Sch92] an, von der vermutet wird, daß sie alle selbstdualen unitären VOAs beschreibt. Die analoge Klassifikation für selbstduale Gitter war von Kneser [Kne57] und Niemeier [Nie73] erhalten worden. Weiter geben wir in diesem Kapitel eine Beschreibung der selbstdualen unitären SVOAs vom Rang kleiner 8: für jeden Rang gibt es genau eine SVOA. Mit den Methoden des nächsten Kapitels wird es möglich sein, die selbstdualen unitären SVOAs vom Rang kleiner 24 zu klassifizieren [Höh]. Viel weiter wird man in der Klassifikation nicht kommen können, da die *Minkowski-Siegelsche Maßformel* [Dir40, Min84, Sie35, Wei82] zeigt, daß die Anzahl der selbstdualen Gitter und damit auch die Anzahl der (S)VOAs jenseits von 24 sehr stark anwächst.

Eine interessante Fragestellung ist es, eine analoge Maßformel auch für VOAs zu finden. Probleme hierbei sind, daß man gleichzeitig endliche und unendliche Automorphismengruppen berücksichtigen muß, daß man keinen Raum kennt ($\mathbf{F}_2^n$ bei Codes, $\mathbf{R}^n$ bei Gittern), in den sich alle VOAs festen Ranges einbetten lassen, und daß man keine offensichtliche Gruppe hat, die operiert (S_n bei Codes, $\mathbf{SO}_n(\mathbf{A_Q})$ die orthogonale Gruppe über den Adelen bei Gittern $\cong$ quadratischen Formen). Insbesondere wäre eine Übertragung des Begriffes *Geschlechter* [Cas78, Are95] von quadratischen Formen auf VOAs interessant. Zu erwarten ist dann zumindest, daß die *Klassenzahl*, d.h. die Anzahl der Isomorphieklassen von VOAs von festem Geschlecht (z.B. dem selbstdualen) endlich ist.

2.1 Selbstduale VOAs

Die Struktur der in 1.1.6 definierten Fusionsalgebra kann recht kompliziert sein, es sind keine allgemeinen Klassifikationssätze bekannt. Es erscheint daher sinnvoll, insbesondere die (S)VOAs zu untersuchen, für die die Fusionalgebra trivial ist. Wie das Beispiel des Mondscheinmoduls zeigt, können diese (S)VOAs trotzdem eine interessante Struktur besitzen. Wir machen daher die

Definition 2.1.1 *Eine (S)VOA V heißt selbstdual, wenn sie bis auf Isomorphie genau einen irreduziblen Modul besitzt, nämlich V als adjungierten Modul selbst.*

Anmerkungen: Außer der Bezeichnung *selbstdual* werden auch die Bezeichnungen *holomorph* [DM] oder *meromorph* [Sch92] verwendet. Wegen der Analogie zu Codes und Gitter verwenden wir in dieser Arbeit die Bezeichnung selbstdual.

Eine selbstduale (S)VOA ist insbesondere einfach, da sie als adjungierter Modul irreduzibel ist.

Nach Satz 1.2.6 ist die Fusionsalgebra einer SVOA V_L zu einem ganzen Gitter L isomorph zum Gruppenring $\mathbf{Z}[L^*/L]$, d.h. V_L ist genau dann selbstdual, wenn L selbstdual ist.

Im Rest dieses Abschnittes betrachten wir selbstduale VOAs und im nächsten selbstduale SVOAs. Alle Aussagen dieses Abschnittes finden sich auch in der physikalischen Literatur, sind dort teilweise aber nicht bewiesen oder nur ohne genaue Angabe der Voraussetzung.

In Verallgemeinerung der entsprechenden Sätze für gerade Codes (Gleason, vgl. [MS77], Kap. 19) und Gitter (Hecke, vgl. [CS93], Kap. 7.6) gilt der

Satz 2.1.2 (vgl. z.B. [God89]) *Sei V eine selbstduale „schöne" rationale VOA vom Rang c. Dann ist der Charakter $\chi_V = q^{-c/24}\sum_{n=0}^{\infty}\dim V_n\, q^n$ ein homogenes Polynom $P(x,y)$ vom Gewicht c in den Funktionen $x = \sqrt[3]{j}$ (Gewicht 8) und $y = 1$ (Gewicht 24), oder — äquivalent dazu — ein homogenes Polynom in $x = \chi_{V_{E_8}}$ und $y = \chi_{V^\natural}$, den Charakteren der selbstdualen VOA zum Gitter E_8 und der selbstdualen Monster-VOA $V^\natural$.*

Korollar 2.1.3 *Der Rang c einer selbstdualen „schönen" rationalen VOA ist ein ganzzahliges Vielfaches von 8.*

Falls V unitär ist, gilt nach Satz 1.1.11 natürlich $c \geq 0$.

Beweis: Da V nur einen irreduziblen Modul besitzt, liefert nach Korollar 1.4.3 zum Satz von Zhu der von $\chi_V = q^{-c/24}\sum_{n=0}^{\infty} \dim V_n q^n$ aufgespannte $\mathbf{C}$-Vektorraum eine eindimensionale Darstellung von $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$. Für die Erzeuger $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ hat man das folgende Transformationsverhalten:

$$\begin{aligned} \chi_V(\tau)\,|_T &= e^{-\frac{2\pi i c}{24}} \cdot \chi_V(\tau), \\ \chi_V(\tau)\,|_S &= \chi_V(\tau). \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung gilt wegen $S^2 = \mathrm{id}$ und $\chi_V(i) = \chi_V(i)\,|_S = \sum_{n=0}^{\infty} \dim V_n \cdot e^{-2\pi(-c/24+n)} > 0$. Wegen der Relation $(ST)^3 = \mathrm{id}$ in $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ folgt $e^{2\pi i \frac{c}{8}} = 1$, d.h. $c \in 8\mathbf{Z}$. Daher ist $\chi_V(\tau)$ invariant unter T^3.

Die von S und T^3 erzeugte Untergruppe Γ hat Index 3 in $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ und die zugehörige Fläche $\overline{\mathbf{H}/\Gamma}$ hat das Geschlecht 0. Den Körper der meromorphen Funktionen bilden die rationalen Funktionen in $\sqrt[3]{j} = q^{-(1/3)}(1 + 248q + \cdots) \in q^{-(1/3)}\mathbf{Z}[[q]]$, der 3-ten Wurzel der absoluten Modulinvariante j (siehe [Sch74], S. 131). Die Funktion $\sqrt[3]{j}$ hat einen einfachen Pol in der Spitze ∞ (lokale Koordinate $q^{1/3}$). Der Charakter $\chi_V \in q^{-\frac{1}{3}\cdot\frac{c}{8}}\mathbf{Z}[[q]]$ ist nach Satz 1.4.2 holomorph in der oberen Halbebene und hat einen Pol der Ordnung $\frac{c}{8}$ in ∞. Er ist daher ein Polynom vom Grad $\frac{c}{8}$ in $\sqrt[3]{j}$, in dem wegen der q-Entwicklung nur Exponenten kongruent $c/8 \pmod 3$ vorkommen. Hieraus folgt der Satz. Die Umformulierung gilt wegen $\chi_{V_{E_8}} = \sqrt[3]{j}$ und $\chi_{V^\natural} = \left(\sqrt[3]{j}\right)^3 - 744$. $\square$

Beispiele von selbstdualen „schönen" rationalen VOAs:

Positiv definite gerade selbstduale Gitter liefern nach Konstruktion 1.2.6 die folgenden Beispiele von selbstdualen unitären VOAs: Für $c = 8$: V_{E_8}, für $c = 16$: $V_{E_8} \otimes V_{E_8}$, $V_{D_{16}^+}$ und für $c = 24$ die 24 VOAs, die zu den 24 Niemeiergittern [Nie73] gehören. Für $c \geq 32$ gibt es mehr als 80 Millionen Gitter (vgl. [Ser73], Kap. 7) und daher mindestens ebenso viele VOAs, d.h. eine Klassifikation für $c \geq 32$ ist praktisch nicht durchführbar.

Die Monster-VOA $V^\natural$ (s. 1.2.9) ist nach Dong [Don94] rational und selbstdual.

Schellekens [Sch92, Sch93] hat für $c = 24$ eine Liste von 71 selbstdualen VOA-Kandidaten angegeben. Davon sind allerdings nur für 39 Kandidaten (24 Niemeiergitter-VOAs & 15 „$\mathbf{Z}_2$-Orbifolds" [DGM90b]) die volle VOA-Struktur konstruiert und für 25 davon (Niemeiergitter-VOAs [Don93] und $V^\natural$) die Selbstdualität bewiesen. Die Konstruktion der Liste beruht auf der Klassifikation der von V_1 erzeugten affinen Liealgebren. Da V_1 nach Lemma 1.1.12 reduktiv ist, falls V „schön" und unitär ist, fassen wir zusammen:

Vermutung 2.1.4 *Sei V eine selbstduale unitäre „schöne“ rationale VOA vom Rang $c \leq 24$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} &\textit{für } c = 8 &:& \quad V \cong V_{E_8}, \\ &\textit{für } c = 16 &:& \quad V \cong V_{E_8} \otimes V_{E_8}, \quad V_{D_{16}^+}, \\ &\textit{für } c = 24 &:& \quad V \textit{ ist isomorph zu einer der } 71 \textit{ VOAs aus [Sch92].} \end{aligned}$$

Bei Annahme der Eigenschaft *L-Lie* (siehe 1.2.8) können wir für $c = 8$ bzw. $c = 16$ die Vermutung fast beweisen. Aus Satz 2.1.2 folgt $\dim V_1 = 248$ bzw. $\dim V_1 = 496$. Die Gleichungen (s. 1.2.5) $\dim V_1 = \sum \dim \mathbf{g}_i$ und $c = \sum \frac{k_i \cdot \dim \mathbf{g}_i}{k_i + \check{g}_i)}$ liefern als einzige Lösungen $\widetilde{V}_1 = V_{E_{8,1}}$ für $c = 8$ bzw. (a) $\widetilde{V}_1 = V_{E_{8,1}} \otimes V_{E_{8,1}}$ oder (b) $\widetilde{V}_1 = V_{D_{16,1}}$ für $c = 16$. Da $\chi_V = \chi_{V_{E_{8,1}}}$, folgt $V = V_{E_{8,1}}$ für $c = 8$. Für $c = 16$ folgt (a) $V = V_{E_{8,1}} \otimes V_{E_{8,1}}$ oder (b) $V = V_{D_{16,1}} \oplus V_{D_{16,1}}^{h=2}$. Die Gitter-VOAs zu den Wurzelsystemen A_n, D_n, E_n sind nach Satz 1.2.7 isomorph zu den VOAs, die zu den fundamentalen Stufe 1 Darstellungen der zugehörigen affinen Kac-Moody-Algebren assoziiert sind. Allerdings bleibt zu zeigen, daß bei (b) die VOA-Struktur stets mit der VOA-Struktur der Gitter-VOA übereinstimmt.

2.2 Selbstduale SVOAs

Für selbstduale Codes ist es offensichtlich, daß sie nur für gerade Dimensionen existieren. Der Rang eines Gitters ist nach Definition immer ganz. Wir werden hier zeigen, daß der Rang einer selbstdualen SVOA halbganz ist. Als Vorbereitung benötigen wir folgendes einfaches

Lemma 2.2.1 *Sei $f(p) = 1 + p + a_2 p^2 + \cdots \in \mathbf{Z}[[p]]$. Dann werden die Nenner der Potenzreihe f^r für $r \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$ beliebig groß.*

Beweis: Sei π ein Primteiler des Nenners des gekürzten Bruches $r = \frac{u}{v}$. Annahme:

$$f^r = \sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i = 1 + \frac{u}{v} p + O\left(p^2\right)$$

hat beschränkte Nenner. Dann gibt es einen kleinsten Index $i_0 \geq 1$, für den b_{i_0} die maximale π-Potenz π^l mit $l \geq 1$ in den Nennern der b_i hat. Der Koeffizient von $p^{v \cdot i_0}$ in $f^{r \cdot v} = f^u \in \mathbf{Z}[[p]]$ ist

$$\sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_v \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_v = v \cdot i_0}} b_{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot b_{\alpha_v}.$$

Der in der Summe enthaltende Summand $b_{i_0}^v$ hat den Faktor $\pi^{v \cdot l}$ im Nenner. Nach Definition von i_0 ist dies aber auch der einzige mit dieser Eigenschaft, im Widerspruch zur Ganzzahligkeit der Summe. $\square$

Satz 2.2.2 *Der Rang c einer selbstdualen „schönen“ rationalen SVOA V ist eine halbganze Zahl.*

Beweis: Da V selbstdual und rational ist, bildet nach Korollar 1.4.7 der von dem Charakter χ_V aufgespannte $\mathbf{C}$-Vektorraum eine eindimensionale Darstellung von $\Gamma_\theta = \langle S, T^2 \rangle$. Wie beim Beweis von Satz 2.1.2 hat man:

$$\chi_V(\tau)\,|_{T^2} = e^{2\pi i \frac{2c}{24}} \cdot \chi_V(\tau), \tag{2.1}$$

$$\chi_V(\tau)\,|_S = \chi_V(\tau). \tag{2.2}$$

Bezeichne für eine natürliche Zahl N mit $\Gamma_{\theta,N}$ den Kern des durch $\rho(S) = 1$ und $\rho(T^2) = e^{2\pi i \cdot \frac{1}{N}}$ gegebenen Gruppenhomomorphismus $\rho : \Gamma_\theta \longrightarrow \mathbf{C}^*$. Da T^2 in Γ_θ einen freien zyklischen Faktor erzeugt, ist ρ wohldefiniert. Die Fläche $\overline{\mathbf{H}/\Gamma_{\theta,N}}$ ist dann eine N-blättrige Überlagerung von $\overline{\mathbf{H}/\Gamma_\theta} \cong \mathbf{CP}_1$, die in den beiden Spitzen ∞ und 1 von Γ_θ einen N-fachen Verzweigungspunkt besitzt. Die Modulfunktion j_θ (s. 1.11) bildet $\overline{\mathbf{H}/\Gamma_\theta}$ biholomorph nach $\mathbf{CP}_1$ ab, d.h. der Körper der meromorphen Funktionen von $\overline{\mathbf{H}/\Gamma_\theta}$ sind die rationalen Funktionen in j_θ. Da j_θ einen einfachen Pol in der Spitze ∞ und eine einfache Nullstelle in der Spitze 1 besitzt, ist $\mathbf{C}(\sqrt[N]{j_\theta})$ der Körper der meromorphen Funktionen auf $\overline{\mathbf{H}/\Gamma_{\theta,N}}$.

Sei N der Nenner der rationalen Zahl $\frac{2c}{24}$. Nach Satz 1.4.6 ist χ_V holomorph in $\mathbf{H}$ und wegen (2.1) ist χ_V invariant unter $\Gamma_{\theta,N}$, definiert also eine auf $\mathbf{H}/\Gamma_{\theta,N}$ holomorphe Funktion. In der Spitze ∞ hat χ_V höchstens einen Pol. Dies gilt auch für die andere Spitze: Nach Definition der Rationalität ist auch die Unter-VOA $V_{(0)}$ rational. Da $\chi_V = \chi_{V(0)} + \chi_{V(1)}$, erhält man mit Satz 1.4.2 für die q-Entwicklung in der Spitze 1

$$\chi_V\,|_{TS} = \sum_{i=1}^{l} r_i\, \chi_{M_i}, \tag{2.3}$$

wobei die M_1 bis M_l die irreduziblen Moduln von $V_{(0)}$ sind. Die M_i haben nach Definition 1.1.2 nach unten beschränkte L_0-Eigenwerte, d.h. χ_{M_i} hat höchstens einen Pol in ∞. Insgesamt ist somit χ_V eine meromorphe Funktion auf $\overline{\mathbf{H}/\Gamma_{\theta,N}}$, also $\chi_V \in \mathbf{C}(\sqrt[N]{j_\theta})$.

Die 24-te Wurzel $\chi_{1/2}$ aus j_θ hat nach (1.11) noch eine ganzzahlige q-Entwicklung:[1]

$$\chi_{1/2} = \sqrt[24]{j_\theta} = q^{-\frac{1}{48}} \prod_{n=0}^{\infty} (1 + q^{n+\frac{1}{2}}) \in q^{-\frac{1}{48}} \mathbf{Z}[[q^{1/2}]].$$

[1] Lemma 2.2.1 zeigt, daß $\sqrt[N]{j_\theta}$ genau dann eine q-Entwicklung mit beschränkten Nennern hat, falls N ein Teiler von 24 ist. Da die Koeffizienten von Modulfunktionen zu $\Gamma(n)$ mit rationaler q-Entwicklung stets beschränkte Nenner besitzen, kann nur für $N \mid 24$ die Gruppe $\Gamma_{\theta,N}$ eine Kongruenzuntergruppe sein. Andererseits gilt $\Gamma(48) \subset \Gamma_{\theta,24}$, wie man mit (1.11) und dem Transformationsverhalten der η-Funktion unter beliebigen Matrizen $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ (vgl. [Rad73], S. 163) leicht nachrechnet, d.h. $\Gamma_{\theta,N}$ ist für $N \mid 24$ eine Kongruenzuntergruppe.

Sei $c = \bar{c} + r$ mit $\bar{c} \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ und $0 \leq r < \frac{1}{2}$. Die Funktion $\chi_V \cdot \chi_{1/2}^{-2r} \in q^{-\bar{c}/24}\mathbf{Q}[[q^{1/2}]]$ multipliziert sich mit einer 24-ten Einheitwurzel unter T^2 und liegt daher in $\mathcal{M}(\overline{\mathbf{H}/\Gamma_{\theta,24}}) = \mathbf{C}(\chi_{1/2})$. Es folgt

$$\chi_V \cdot \chi_{1/2}^{-2r} = \sum_{i=0}^{n_0} a_i \cdot \chi_{1/2}^{2\bar{c}-24i} \tag{2.4}$$

mit rationalen Zahlen a_i. Sei M der gemeinsame Nenner der a_i. Da auch $\chi_V^{-1} \in q^{c/24}\mathbf{Z}[[q^{1/2}]]$, erhält man schließlich

$$\chi_{1/2}^{-2r} \in q^{\frac{r}{24}} \frac{1}{M} \mathbf{Z}[[q^{1/2}]].$$

Nach Lemma 2.2.1 ist dies aber nur für $r = 0$ möglich, d.h. es gilt $c = \bar{c} \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$. □

Satz 2.2.2 war von Verlinde in [Ver88], S. 375 vermutet worden. Setzen wir V zusätzlich noch als unitär voraus, so können wir den Charakter noch genauer bestimmen:

Satz 2.2.3 *Sei V eine selbstduale „schöne" unitäre rationale SVOA vom Rang c. Dann ist ihr Charakter $\chi_V = q^{-\frac{c}{24}} \sum_{n=0}^{\infty} \dim V_n \, q^n$ ein homogenes Polynom $P(x,y)$ vom Gewicht c in den Reihen $x = \sqrt{\frac{\Theta_{\mathbf{Z}}}{\eta}} = \chi_{1/2}$ (Gewicht $1/2$) und $y = \sqrt[3]{j}$ (Gewicht 8), d.h. in den Charakteren der SVOAs V_{Fermi} vom Rang $1/2$ und V_{E_8} von Rang 8.*

Beweis: Wie im letzten Satz gezeigt, ist c halbganz, und nach Gleichung (2.4) gilt daher

$$\chi_V = \sum_{i=0}^{n_0} a_i \, \chi_{1/2}^{2c-24i}. \tag{2.5}$$

Auf $\overline{\mathbf{H}/\Gamma_{\theta,24}}$ hat $\chi_{1/2}$ einen einfachen Pol in ∞ (lokale Koordinate $q^{1/48}$) und eine einfache Nullstelle in 1 (lokale Koordinate $q^{1/24}$). Nach Gleichung (2.3) gilt für die Entwicklung von χ_V in 1:

$$\chi_V \,|_{TS} = \sum_{i=1}^{l} r_i \, \chi_{M_i} \qquad \text{mit} \quad \chi_{M_i} = q^{-\frac{c}{24}+h_i} \sum_{n\geq 0} \dim M_i \, q^n.$$

Da V als unitär vorausgesetzt wurde, ist nach Lemma 1.1.11 $h_i \geq 0$. Daher hat χ_{M_i} höchstens einen Pol der Ordnung c in ∞ bzw. χ_V höchstens einen Pol der Ordnung c in 1, und daher kann in (2.5) $n_0 = \left[\frac{c}{8}\right]$ gesetzt werden. Umformen liefert

$$\chi_V = \sum_{i=0}^{\left[\frac{c}{8}\right]} b_i \, \chi_{1/2}^{2c-16i} \cdot \left(\chi_{1/2}^{16} - 16\, \chi_{1/2}^{-8}\right)^i$$

mit Zahlen b_i, die sich linear aus den a_i ergeben. Also ist χ_V — wie behauptet — ein homogenes Polynom vom Gewicht c in $\chi_{1/2} = \chi_{V_{\mathrm{Fermi}}}$ und $(\chi_{1/2}^{16} - 16\, \chi_{1/2}^{-8}) = \sqrt[3]{j} = \chi_{V_{E_8}}$. □

Über die Eigenschaften der Unter-VOA $V_{(0)}$ einer selbstdualen „schönen" rationalen SVOA $V = V_{(0)} + V_{(1)}$ lassen sich weitere Aussagen machen.

Nach Satz 1.4.6 ist der von dem Charakter $\chi_V = \chi_{V_{(0)}} + \chi_{V_{(1)}}$ aufgespannte $\mathbf{C}$-Vektorraum invariant unter $\Gamma_\theta = \langle S, T^2 \rangle$. Die drei Funktionen χ_V, $\chi_V \mid_T$ und $\chi_V \mid_{TS}$ spannen daher einen höchstens 3-dimensionalen (gleich 3 falls $V_{(0)} \neq 0$) $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$-Modul auf. Wir wählen eine neue Basis, auf der T für beliebige c diagonal operiert:

$$\chi_{V(0)} = \frac{1}{2}(\chi_V + e^{2\pi i \frac{c}{24}} \chi_V \mid_T), \quad \chi_{V(1)} = \frac{1}{2}(\chi_V - e^{2\pi i \frac{c}{24}} \chi_V \mid_T), \quad \chi_{\mathrm{Rest}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{2\pi i \frac{c}{24}} \chi_V \mid_{TS} .$$

Für die Operation der Erzeuger S und T von $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ erhalten wir unter Verwendung der Relation $(ST)^3 = \mathrm{id}$ in dieser Basis die Matrizen

$$\overline{T} = \begin{pmatrix} e^{-2\pi i \frac{c}{24}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(-\frac{c}{24}+\frac{1}{2})} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi i(-\frac{c}{24}+\frac{c}{8})} \end{pmatrix}, \qquad \overline{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Die Funktion χ_{Rest} wurde so normiert, daß $\overline{S}$ unitär ist. Nehmen wir nun an, daß $V_{(0)}$ und $V_{(1)}$ irreduzible $V_{(0)}$-Moduln sind, die Verlindeformel (1.4.4) gilt und die „Quantendimensionen" $\frac{\widetilde{S}_{i1}}{\widetilde{S}_{11}} \geq 1$ sind (s. [Fuc92], S. 343), so sind die möglichen $\widetilde{S}$-Matrizen (s. 1.4.2) gegeben durch

$$\text{Fall (a)} \quad \widetilde{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{Fall (b)} \quad \widetilde{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \mp\frac{i}{2} & \pm\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \pm\frac{i}{2} & \mp\frac{i}{2} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$\text{oder Fall (c)} \quad \widetilde{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \pm\frac{1}{2} & \mp\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \mp\frac{1}{2} & \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

und χ_{Rest} ist der Charakter von einem bzw. $\sqrt{2}\chi_{\mathrm{Rest}}$ der Charakter von zwei $V_{(0)}$-Moduln. Für die zugehörigen Fusionsalgebren $\mathcal{F}(V_{(0)})$ ergäbe sich aus der Verlindeformel im

$$\begin{aligned} &\text{Fall (a)}: \ \text{3 Moduln } V_{(0)}, V_{(1)} \text{ und } V_{(2)}, \text{ Fusionsalgebra wie beim „Isingmodell"}, \\ &\text{Fall (b)}: \ \text{4 Moduln } V_{(0)}, V_{(1)}, V_{(2)} \text{ und } V_{(3)}, \text{ Fusionsalgebra } \mathcal{F}(V_{(0)}) \cong \mathbf{Z}[\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}], \\ &\text{Fall (c)}: \ \text{4 Moduln } V_{(0)}, V_{(1)}, V_{(2)} \text{ und } V_{(3)}, \text{ Fusionsalgebra } \mathcal{F}(V_{(0)}) \cong \mathbf{Z}[\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Wir machen daher die folgende

Definition 2.2.4 *Eine selbstduale „schöne" rationale SVOA V heißt „sehr schön", falls die Fusionsalgebra der Unter-VOA $V_{(0)}$ eine der drei Fälle (a), (b) oder (c) in (2.8) ist, die*

Operation von $S \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ auf den „Korellationsfunktionen auf dem Torus" durch (2.7) gegeben ist und χ_{Rest} der Charakter des Moduls $V_{(2)}$ (im Fall (a)) bzw. $\sqrt{2}\chi_{\mathrm{Rest}}$ die Summe der Charaktere von $V_{(2)}$ und $V_{(3)}$ (Fälle (b) und (c)) ist. Außerdem ist der Fall $V = V_{(0)}$ zugelassen, d.h. V ist sogar eine selbstduale VOA.

Vermutlich ist eine selbstduale „schöne" unitäre rationale SVOA stets „sehr schön", hierzu müßte man die Beziehung zwischen den Algebren $A(V_{(0)})$ und $A(V)$ genauer untersuchen (vgl. die Beweisskizze von Satz 1.4.6).

Es besteht der folgende Zusammenhang zwischen dem nach Satz 2.2.2 halbganzen Rang c und der Struktur der Fusionsalgebra von $V_{(0)}$:

Satz 2.2.5 *Sei V eine selbstduale „sehr schöne" unitäre rationale SVOA. In Abhängigkeit vom Rang c ist die Struktur der Fusionsalgebra von $V_{(0)}$ gegeben durch*

$$\mathcal{F}(V_{(0)}) = \begin{cases} \textit{Ising (Fall (a))}, & \textit{falls } c \in \frac{1}{2}\mathbf{Z} \setminus \mathbf{Z}, \\ \mathbf{Z}[\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}] \textit{ (Fall (b))}, & \textit{falls } c \in \mathbf{Z} \setminus 2\mathbf{Z}, \\ \mathbf{Z}[\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}] \textit{ (Fall (c))}, & \textit{falls } c \in 2\mathbf{Z}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Beweis: Nach Gleichung (2.5) gilt $\chi_V = \sum_{i=0}^{n_0} a_i \chi_{1/2}^{2c-24i}$ mit ganzen Zahlen a_i, also

$$\chi_{\mathrm{Rest}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{2\pi i \frac{c}{24}}\, \chi_V\, |_{TS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^{n_0} a_i\, (-1)^i\, \left(e^{\frac{2\pi i}{48}} \chi_{1/2}\, |_{TS}\right)^{2c-24i}.$$

Da $\chi_{1/2}\ |_{TS} = e^{-\frac{2\pi i}{48}} \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)$, hat χ_{Rest} für $c \in \frac{1}{2}\mathbf{Z} \setminus \mathbf{Z}$ eine rationale q-Entwicklung bzw. $\sqrt{2}\chi_{\mathrm{Rest}}$ für $c \in \mathbf{Z}$, d.h. für $c \in \frac{1}{2}\mathbf{Z} \setminus \mathbf{Z}$ muß Fall (a) vorliegen und für $c \in \mathbf{Z}$ der Fall (b) oder (c).

Im Fall (b) oder (c) gilt $\widetilde{T} = \mathrm{Diag}(e^{-2\pi i \frac{c}{24}}, e^{2\pi i(-\frac{c}{24}+\frac{1}{2})}, e^{2\pi i(-\frac{c}{24}+\frac{c}{8})}, e^{2\pi i(-\frac{c}{24}+\frac{c}{8})})$. Man erhält aus $(ST)^6 = \mathrm{id}$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ im Fall (b) die Bedingung $c \in \mathbf{Z} \setminus 2\mathbf{Z}$ bzw. im Fall (c) die Bedingung $c \in 2\mathbf{Z}$. Die Vorzeichen in $\widetilde{S}$ sind durch die Restklasse $c \bmod 4$ eindeutig festgelegt. □

Definiert man auf einer SVOA V einen linearen Isomorphismus κ durch

$$\kappa(v) = \begin{cases} v, & \text{für } v \in V_{(0)}, \\ -v, & \text{für } v \in V_{(1)}, \end{cases}$$

wobei $V_{(0)}$ und $V_{(1)}$ der gerade bzw. ungerade Unterraum von V sind, so ist κ eine Involution und ein Automorphismus der SVOA V. Es ist daher natürlich, κ-getwistete V-Moduln zu betrachten (für eine Definition siehe [FFR91]). In der physikalischen Literatur werden die (ungetwisteten) V-Moduln als die *Neveu-Schwarz Sektoren für V* und die κ-getwisteten V-Moduln als die *Ramond Sektoren für V* bezeichnet. Für eine selbstduale „sehr schöne" SVOA V ist zu erwarten, daß die irreduziblen κ-getwisteten Moduln von V gerade $V_{(2)} \oplus V_{(2)}$ ($c \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}$) bzw. $V_{(2)} \oplus V_{(3)}$ ($c \in \mathbf{Z}$) sind.

Beispiele von selbstdualen „sehr schönen" unitären rationalen SVOAs:

Die SVOA $V_{\rm Fermi}$: Eine SVOA mit dem kleinsten zulässigen Rang $c=\frac{1}{2}$ wurde in [KW94], konstruiert. Diese auch als „freies Fermion" bezeichnete SVOA $V_{\rm Fermi}$ ist rational und selbstdual (Satz 4.1 in [KW94]). Für die Eigenschaft unitär vgl. [God89], Abschnitt 8. Die Unter-VOA $(V_{\rm Fermi})_{(0)}$ kann nach Satz 1.2.2 nur die zur unitären $c=\frac{1}{2}$ Höchstgewichtsdarstellung der Virasoroalgebra assozierte VOA $L_{1/2}(0)$ sein, deren Rationalität in [Wan93] gezeigt wurde. Dort wurden auch die 3 irreduziblen $L_{1/2}(0)$-Moduln $L_{1/2}(0)$, $L_{1/2}(\frac{1}{2})$ und $L_{1/2}(\frac{1}{16})$ mit den konformen Gewichten 0, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{16}$ bestimmt. Für die Fusionsalgebra von $L_{1/2}(0)$ ergibt sich nach [DMZ94], Abschnitt 3, die in der physikalischen Literatur als „Fusionsregeln des Isingmodells" bezeichnete Struktur:

$$L_{1/2}(\frac{1}{2})\times L_{1/2}(\frac{1}{2})=L_{1/2}(0),\qquad L_{1/2}(\frac{1}{2})\times L_{1/2}(\frac{1}{16})=L_{1/2}(\frac{1}{16}),$$

$$L_{1/2}(\frac{1}{16})\times L_{1/2}(\frac{1}{16})=L_{1/2}(0)+L_{1/2}(\frac{1}{2}) \tag{2.10}$$

und $L_{1/2}(0)$ ist die Identität in der Fusionsalgebra. Da für den Charakter $\chi_{V_{\rm Fermi}}=\chi_{1/2}$ gilt (Satz 2.2.3 oder (1.16)), muß schließlich $V_{\rm Fermi}=L_{1/2}(0)\oplus L_{1/2}(\frac{1}{2})$ gelten. Nach Gleichung (1.15) ist weiter $\frac{1}{\sqrt{2}}\chi_{\rm Rest}=\chi_{L_{1/2}(\frac{1}{16})}$, d.h. $V_{\rm Fermi}$ ist „sehr schön".

Die zu ungeraden selbstdualen Gittern L assoziierten SVOAs V_L: Die Eigenschaft „sehr schön" ergibt sich aus Satz 1.2.6, da für das gerade Untergitter $L_0\subset L=L_0\cup(L_0+[2])$ in geraden Dimensionen $L_0^*/L_0\cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ und in ungeraden Dimensionen $L_0^*/L_0\cong\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ gilt und die Zerlegung der SVOA $V_L=V_{L_0}\oplus V_{L_0+[2]}$ in den geraden und den ungeraden Teil besteht.

Die SVOA $VO^\natural=W_{NS}$: Die mit der Monster VOA $V^\natural$ in Beziehung stehende SVOA W_{NS} ist das VOA-Analogon zu dem ungeraden Golay Code Z_{24} [PS75] und dem ungeraden Leechgitter O_{24} [OP44] in Dimension 24 und könnte daher auch als *ungerader Mondscheinmodul $VO^\natural$* bezeichnet werden. Die SVOA W_{NS} ist eine Unter-SVOA einer in [DGH88] beschriebenen „superkonformen" VOA W vom Rang 24: In [Hua94] wird gezeigt, daß die bei der Konstruktion des Monstermoduls $V^\natural=V_\Lambda^+\oplus(V_\Lambda^T)^+$ verwendete Unter-VOA V_Λ^+ die 4 irreduziblen Moduln V_Λ^+, V_Λ^-, $(V_\Lambda^T)^-$ und $(V_\Lambda^T)^+$ mit den konformen Gewichten 0, 1, $\frac{3}{2}$ und 2 besitzt, und auf $W=V_\Lambda^+\oplus V_\Lambda^-\oplus(V_\Lambda^T)^-\oplus(V_\Lambda^T)^+$ wird die Existenz einer „superkonformen" Struktur bewiesen. Diese induziert dann auf $W_{NS}=V_\Lambda^+\oplus(V_\Lambda^T)^-$ eine SVOA-Struktur (die sogar $N=1$ supersymmetrisch im Sinne von [KW94] ist). Die Unter-VOA $(W_{NS})_{(0)}$ von W_{NS} ist V_Λ^+ und hat die Fusionsalgebra $\mathbf{Z}[\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}]$ ([Hua94], Satz 3.7). Die Selbstdualität von W_{NS} wurde nicht gezeigt, ist aber zu vermuten. In Analogie zu der Situation bei Codes und Gittern ist außerdem zu vermuten, daß $V^\natural$ und W_{NS} die einzigen selbstdualen „sehr schönen" unitären rationalen SVOAs mit $V_1=0$ sind. Das Beispiel W_{NS} zeigt, daß die Charaktere von $V_{(2)}$ und $V_{(3)}$, deren Summe die Beziehung $\sqrt{2}\chi_{\rm Rest}=\chi_{V_{(2)}}+\chi_{V_{(3)}}$ erfüllt, auch verschieden sein können.

Das Tensorprodukt zweier selbstdualer „sehr schöner" SVOAs sollte wieder „sehr schön" sein. Wir betrachten hier das im nächsten Kapitel benötigte *Beispiel* $V_{\text{Fermi}}^{\otimes k}$:
Zuerst sei daran erinnert, daß die VOA $V_{D_{l,1}}$, die zur fundamentalen Stufe 1 Darstellung der affinen Kac-Moody Algebra $\widetilde{D_l} \cong \widetilde{\mathbf{so}}(2l)$ assoziert ist, isomorph zur Gitter-VOA V_{D_l} von Rang l ist (Satz 1.2.7), und daher nach Satz 1.2.6 die Fusionsalgebra $\mathcal{F}(V_{D_l})$ durch (2.9) gegeben ist. Die Charaktere der irreduziblen Moduln sind in Abschnitt 1.4 beschrieben. Die zu $\widetilde{B}_l \cong \widetilde{\mathbf{so}}(2l+1)$, $l \geq 1$ gehörige VOA $V_{B_{l,1}}$ hat als irreduzible Moduln die 3 Stufe 1 Darstellungen von $\widetilde{B}_l$. Die Fusionsalgebra wird für affine Kac-Moody VOAs ganz allgemein in [FZ92] beschrieben, und man prüft nach, daß sich die Ising Fusionsregeln ergeben. Die Charaktere ergeben sich aus der Weyl-Kac-Charakterformel [Kac90].

Satz 2.2.6 *Das k-fache Tensorprodukt $V_{\text{Fermi}}^{\otimes k}$ ist eine selbstduale „sehr schöne" unitäre rationale SVOA von Rang $\frac{k}{2}$. Die Unter-VOA $V_{\mathbf{so}(k)} := (V_{\text{Fermi}}^{\otimes k})_{(0)}$ ist die zu den folgenden Höchstgewichtsdarstellungen von affinen Kac-Moody Algebren assoziierte VOA:*

$$V_{\mathbf{SO}(k)} = \begin{cases} V_{D_{l,1}} & \textit{falls } l = 2k, \\ V_{B_{l,1}} & \textit{falls } l = 2k+1, \end{cases}$$

und der ungerade Teil $(V_{\text{Fermi}}^{\otimes k})_{(1)}$ ist der (bzw. einer, falls $k = 8$) Stufe 1 Modul mit dem konformen Gewicht $h = \frac{1}{2}$.

Beweis: Nach Satz 1.1.13 ist $V_{\text{Fermi}}^{\otimes k}$ eine „schöne" unitäre rationale SVOA. Zu zeigen bleibt die angegebene Struktur des geraden und ungeraden Teils von $V_{\text{Fermi}}^{\otimes k}$. Dann gelten wegen der oben beschriebenen Eigenschaften von $V_{D_{l,1}}$ und $V_{B_{l,1}}$ alle die für „sehr schön" benötigten Eigenschaften.

Der Summe $V_{D_{l,1}} \oplus V_{D_{l,1}^{h=1/2}}$ kann die Struktur einer SVOA gegeben werden (vgl. [Tsu90, FFR91, DM94a]), für die Summe $V_{B_{l,1}} \oplus V_{B_{l,1}^{h=1/2}}$ wurde dies in [DLM95a] (Beispiel 5.12) gezeigt. Aufgrund der Eigenschaft *L-Clifford* (Satz 1.2.4) erzeugen die Vertexoperatoren des Gewicht $\frac{1}{2}$-Anteils von $V_{\text{Fermi}}^{\otimes k}$ als auch von $V_{D_{l,1}} \oplus V_{D_{l,1}^{h=1/2}}$ bzw. $V_{B_{l,1}} \oplus V_{B_{l,1}^{h=1/2}}$ eine zur unendlich dimensionalen Cliffordalgebra $\mathbf{Cliff}(\mathbf{Z} + \frac{1}{2})$ assoziierte Unter-SVOA mit dem Charakter $\chi_{1/2}^k$. Dies ist aber auch der Charakter von $V_{D_{l,1}} \oplus V_{D_{l,1}^{h=1/2}}$ bzw. $V_{B_{l,1}} \oplus V_{B_{l,1}^{h=1/2}}$, d.h. beide SVOAs sind isomorph zur Clifford SVOA. □

Da nach Satz 2.2.3 der Charakter einer selbstdualen „sehr schönen" unitären und rationalen SVOA für Ränge c kleiner als 8 durch $\chi_{1/2}^{2c}$ gegeben ist, also $\dim V_{1/2} = 2c$ gilt, liefert voranstehender Beweis das folgende Klassifikationsresultat für den Bereich $0 \leq c < 8$:

Satz 2.2.7 *Eine selbstduale „sehr schöne" unitäre rationale SVOA vom Rang c mit $0 \leq c < 8$ ist isomorph zu $V_{\text{Fermi}}^{\otimes 2c}$.* □

Im nächsten Kapitel, in dem ganz allgemein die Klassifikation der selbstdualen SVOAs auf diejenige der selbstdualen VOAs zurückgeführt wird, werden wir einen Klassifikationssatz für den Bereich $8 \leq c < 16$ angeben. Der folgende Satz zeigt, daß man sich auf SVOAs mit $V_{1/2} = 0$ beschränken kann.

Satz 2.2.8 (vgl. [God89], Abschnitt 8) *Sei V eine selbstduale „schöne" unitäre rationale SVOA vom Rang c mit $\dim V_{1/2} = k$. Dann ist V isomorph zu $W \otimes V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes k}$, wobei W selbst wieder eine selbstduale „schöne" unitäre rationale SVOA vom Rang $c' = c - \frac{k}{2}$ ist.*

Beweis (Skizze): Da wegen $\chi_{U\otimes V} = \chi_U \otimes \chi_V$, d.h. $\dim(U \otimes V)_{1/2} = \dim U_{1/2} + \dim V_{1/2}$, induktiv vorgegangen werden kann, genügt es, $V = V_{\mathrm{Fermi}} \otimes W$ zu zeigen. Dies folgt aus der Eigenschaft *L-Clifford* mit $W = \mathrm{Com}_V(V_{\mathrm{Fermi}})$. Nach [DMZ94, Prop. 2.7] ist W rational und nach [DMZ94, Lemma 2.8] ist W selbstdual. (Bei Verallgemeinerung der jeweiligen Sätze dort auf SVOAs, vgl. [KW94] sowie [DL93].) Die Eigenschaften „schön" und unitär für W folgen aus denen von V und $L_{1/2}(0)$. $\square$

Chapter 3

Die Beziehung zwischen selbstdualen VOAs und SVOAs

Die Klassifikation der ungeraden selbstdualen Codes bzw. Gitter läßt sich auf die Klassifikation der geraden selbstdualen Codes bzw. Gitter in der nächsthöheren zulässigen Dimension zurückführen. In diesem Kapitel wird ein analoges (Teil-)Resultat für die Beziehung zwischen selbstdualen unitären „sehr schönen" rationalen SVOAs und VOAs bewiesen.

Wir skizzieren hier kurz die Beziehung zwischen ungeraden und geraden selbstdualen Codes (siehe [CP80], S. 42). Sei C ein selbstdualer gerader Code der Dimension $n \in 8\mathbf{Z}$. Bezeichne mit d_k den Tetradencode der Länge $k \in 2\mathbf{Z}$, dies ist der gerade Untercode von $c_2^{k/2}$, wobei $c_2 = \{(0,0),(1,1)\}$. Der duale Code $d_k^\perp$ hat bezüglich d_k vier Nebenklassen $d_k^0 = d_k$, d_k^1, d_k^2 und d_k^3, die jeweils Vektoren des Minimalgewichts 0, 2, $\frac{k}{2}$ und $\frac{k}{2}$ enthalten. Bei Wahl eines Untercodes $d_k \subset C$ zerlegt sich C in

$$(w^0 \oplus d_k^0) \cup (w^1 \oplus d_k^1) \cup (w^2 \oplus d_k^2) \cup (w^3 \oplus d_k^3).$$

Hierbei ist w^0 das Komplement von d_k in C, d.h. die Vektoren aus C der Gestalt $(u_1, u_2, \ldots, u_{n-k}, 0, \ldots, 0)$, wobei für d_k die letzten k Koordinaten verwendet wurden. Die Vereinigung $W := w^0 \cup w^1$ bildet dann (falls $w^1 \neq 0$) einen ungeraden selbstdualen Code der Länge $n-k$. Es leicht einzusehen, daß die Konstruktion umkehrbar ist und eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von ungeraden selbstdualen Codes der Länge $n-k$ und den Isomorphieklassen von Paaren (C, d_k) von selbstdualen Codes C mit Untercode d_k liefert. (Für $k = 4$ muß zusätzlich noch die Wahl der Nebenklasse d_k^1 fixiert werden, da das Minimalgewicht aller drei Nebenklassen d_k^1, d_k^2 und d_k^3 gleich 2 ist. Umgekehrt ist eine Unterscheidung zwischen d_k^2 und d_k^3 nicht erforderlich, da beide durch einen „äußeren" Automorphismus von d_k vertauscht werden können.)

Für die analoge Konstruktion bei selbstdualen Gitter siehe die Arbeit [CS82]. Die Rolle von d_k übernimmt hier das Gitter D_k, das gerade Untergitter von $\mathbf{Z}^k$.

Im Fall der Vertexoperatoralgebren schließlich ist $V_{\mathbf{SO}(k)}$, die Unter-VOA der SVOA $V_{\text{Fermi}}^{\otimes k}$, das richtige Analogon. In Abschnitt 3.1 beweisen wir einen Satz für die Richtung VOA nach SVOA, in Abschnitt 3.2 diskutieren wir die Rückrichtung.

3.1 Die Konstruktion von SVOAs aus VOAs

In diesem Abschnitt konstruieren wir zu einer selbstdualen VOA V und einer Unteralgebra $V_{\mathbf{SO}(k)}$ eine SVOA W. Da beim gegenwärtigen Stand der Theorie der VOAs es im allgemeinen nicht bekannt ist, ob die Kommutante von $V_{\mathbf{SO}(k)}$ in V rational ist — was aber zu vermuten ist —, machen wir hier die etwas technische Voraussetzung, daß die Kommutante zumindest eine *rationale Unter-VOA* mit gleichem Virasoroelement wie die Kommutante enthält. Die Konstruktion von W hängt aber nicht von der Wahl dieser Unter-VOA ab. In den uns interessierenden Fällen $\text{rank}(V) \leq 24$ ist diese Voraussetzung auch erfüllt; man findet stets eine geignete Virasoro oder Kac-Moody Unter-VOA.

Sei also V eine „schöne" rationale VOA vom Rang c mit Virasoroelement ω zusammen mit einer Unter-VOA $L := V_{\mathbf{SO}(k)}$ vom Rang $\frac{k}{2}$ mit Virasoroelement ω''. Die Kommutante $\overline{W}_{(0)} = \text{Com}_V(L) := \{v \in V \mid \omega''_0 v = 0\}$ ist nach [FZ92], Satz 5.1 und 5.2 eine Unter-VOA von V vom Rang $c' = c - \frac{k}{2}$, wenn die Bedingung $\omega_2\omega'' = 0$ erfüllt ist. Weiter sei angenommen, daß eine rationale Unter-VOA $U \subset \overline{W}_{(0)}$ mit gleichem Virasoroelement $\omega' := \omega - \omega''$ wie $\overline{W}_{(0)}$ existiert. Nach [DMZ94], Prop. 2.7 ist dann auch $U \otimes L$ rational, und wir haben eine direkte Summenzerlegung

$$V = \bigoplus_{i \in I} M_i \otimes N_i \tag{3.1}$$

mit irreduziblen U bzw. L Moduln M_i und N_i. Nach Satz 2.2.6 besitzt L, in Abhängigkeit vom Rang, 3 oder 4 Typen von irreduziblen Moduln, die wir mit $L = L_{(0)}$, $L_{(1)}$, $L_{(2)}$ (und $L_{(3)}$) bezeichnen und die die konformen Gewichte 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{k}{8}$ (und $\frac{k}{8}$) besitzen. Setzen wir $W_{(a)} := \bigoplus_{i \in I_a} M_i$, mit $I_a = \{i \in I \mid N_i \cong L_{(a)}\}$, so ist (3.1) äquivalent zu

$$V = \bigoplus_{a=0,1,2(,3)} W_{(a)} \otimes L_{(a)}. \tag{3.2}$$

Die Graduierung von $W_{(a)}$ und $L_{(a)}$ ist durch die Virasoroelemente $\omega' \in \overline{W}_{(0)}$ bzw. $\omega'' \in L_{(0)}$ gegeben und sie ist kompatibel mit der von V.

Lemma 3.1.1 *Der U-Modul $W_{(0)} \otimes \mathbf{1}$ stimmt mit der Unter-VOA $\overline{W}_{(0)}$ überein.*

Beweis: Ein von Null verschiedener Vektor $m \otimes n \in M_i \otimes N_i$ liegt genau dann in der Kommutante $\overline{W}_{(0)}$ von L, wenn für das Virasoroelement $\omega'' = \mathbf{1} \otimes \omega''$ die Gleichung

$(\mathbf{1}\otimes\omega'')_0(m\otimes n)=0$ gilt. Nach Definition des Tensorproduktes ist $(\mathbf{1}\otimes\omega'')_0(m\otimes n) = m\otimes\omega''_0 n$ und $\omega''_0 n=0$ heißt, daß n ein vakuumartiges Element ist. Da wir V als „schön" vorausgesetzt haben, ist dies nach [DLM], Abschnitt 2.4, gleichbedeutend mit $n\in\mathbf{C}\cdot\mathbf{1}$, insbesondere also $n\in N_i\cong L_{(0)}$ und damit $m\otimes n\in W_{(0)}\otimes\mathbf{1}$. $\square$

Wir werden auf $W:=W_{(0)}\oplus W_{(1)}$ eine SVOA-Struktur definieren, wobei auch $W_{(1)}=0$ zugelassen sein soll. Für $k=8$ bedeutet die Wahl von $W_{(1)}$ zusätzlich die Auswahl von $L_{(1)}$ unter den 3 äquivalenten $V_{\mathbf{SO}(8)}$-Moduln $L_{(1)}$, $L_{(2)}$ und $L_{(3)}$. Bisher haben wir für W eine U-Modulstruktur und — da U in $W_{(0)}$ liegt — auch Elemente $\mathbf{1}\in(W_{(0)})_0$ und $\omega'\in(W_{(0)})_2$. Zu konstruieren bleibt der Vertexoperator ${}^WY(.,z):W\longrightarrow\mathrm{End}(W)[[z^{-1},z]]$. Dazu zerlegen wir den Vertexoperator ${}^VY(.,z):V\longrightarrow\mathrm{End}(V)[[z^{-1},z]]$ von V bzgl. $U\otimes L$:

$$ {}^VY=\bigoplus_{i,j,k\in I}{}^VY_{ij}^k,\quad \text{wobei } {}^VY_{ij}^k\in\begin{pmatrix} & \mathrm{M_k}\otimes\mathrm{N_k} & \\ \mathrm{M_i}\otimes\mathrm{N_i} & & \mathrm{M_j}\otimes\mathrm{N_j}\end{pmatrix}_{U\otimes L}. $$

Nach [DMZ94], Prop. 2.10, besteht der Isomorphismus

$$ \begin{pmatrix} & \mathrm{M_k}\otimes\mathrm{N_k} & \\ \mathrm{M_i}\otimes\mathrm{N_i} & & \mathrm{M_j}\otimes\mathrm{N_j}\end{pmatrix}_{U\otimes L}\cong\begin{pmatrix} & \mathrm{M_k} & \\ \mathrm{M_i} & & \mathrm{M_j}\end{pmatrix}_U\otimes\begin{pmatrix} & \mathrm{N_k} & \\ \mathrm{N_i} & & \mathrm{N_j}\end{pmatrix}_L. $$

Sei nun $(i,j,k)\in I_a\times I_b\times I_c$ mit $a,\,b,\,c\in\{0,1\}$. Nach den Fusionsregeln für $V_{\mathbf{SO}(k)}\cong L$ ist $N_{ab}^c=\dim\begin{pmatrix} & \mathrm{L_{(c)}} & \\ \mathrm{L_{(a)}} & & L_{(b)}\end{pmatrix}_L\in\{0,1\}$. Die SVOA-Struktur von $V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes k}\cong L_{(0)}\oplus L_{(1)}$ liefert für $a+b+c\equiv 0\pmod 2$ ein von Null verschiedenes Element ${}^LY_{ab}^c\in\begin{pmatrix} & \mathrm{L_{(c)}} & \\ \mathrm{L_{(a)}} & & L_{(b)}\end{pmatrix}_L\cong\begin{pmatrix} & \mathrm{L_k} & \\ \mathrm{L_i} & & \mathrm{L_j}\end{pmatrix}_L$. Wir können für $(i,j,k)\in I_a\times I_b\times I_c$ den Vertexoperator von V daher schreiben als

$$ {}^VY_{ij}^k=\begin{cases} {}^UY_{ij}^k\otimes{}^LY_{ab}^c, & \text{falls } a+b+c\equiv 0 \pmod 2,\\ 0, & \text{falls } a+b+c\equiv 1 \pmod 2.\end{cases} \tag{3.3} $$

Für $W=W_{(0)}\oplus W_{(1)}=\bigoplus_{i\in I_0\cup I_1}M_i$ definieren wir daher:

$$ {}^WY:=\bigoplus_{(i,j,k)\in I_a\times I_b\times I_c}{}^UY_{ij}^k, \tag{3.4} $$

wobei wir für $(i,j,k)\in I_a\times I_b\times I_c,\ a+b+c\equiv 1\pmod 2$ noch ${}^UY_{ij}^k=0$ gesetzt haben.

Lemma 3.1.2 *Der in (3.4) definierte Vertexoperator ${}^WY:W\longrightarrow\mathrm{End}(W)[[z,z^{-1}]]$ hängt nicht von der Auswahl der rationalen Unter-VOA $U\subset W_{(0)}$ ab.*

Beweis: Seien homogene Elemente u, v in $W_{(0)}$ bzw. $W_{(1)}$ und w' in dem eingeschränkten Dualraum $W'_{(0)}$ bzw. $W'_{(1)}$ gegeben. Sei $|\,.\,|$ wie in Definition 1.1.1. Falls $|\,w'\,|\not\equiv|\,u\,|+|\,v\,|\pmod 2$, verschwindet nach Definition (3.4) die Funktion $\langle w',{}^WY(u,z)v\rangle$.

Nach Satz 2.2.6 und Satz 2.2.5 ist ${}^LY_{ab}^c\in\begin{pmatrix} & \mathrm{L_{(c)}} & \\ \mathrm{L_{(a)}} & & L_{(b)}\end{pmatrix}_L\cong\mathbf{C}$ für $a+b+c\equiv 0\pmod 2$ von Null verschieden, da nach Definition $L_{(0)}\oplus L_{(1)}$ eine zu $V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes k}$ isomorphe SVOA ist. Falls $|\,w'\,|\equiv|\,u\,|+|\,v\,|\pmod 2$, gibt es nach [DL93, Prop. 11.9] daher Elemente $\overline{u},\,\overline{v}\in L_{(0)}\oplus L_{(1)}$ bzw. $\overline{w}'\in L'_{(0)}\oplus L'_{(1)}$ mit $|u|=|\overline{u}|$, $|v|=|\overline{v}|$ und $|w'|=|\overline{w}'|$ und

$$\langle \overline{w}', {}^{L}Y(\overline{u}, z)\overline{v}\rangle \not\equiv 0. \tag{3.5}$$

Nach Definition gilt aber

$$\langle w', {}^{W}Y(u, z)v\rangle \cdot \langle \overline{w}', {}^{L}Y(\overline{u}, z)\overline{v}\rangle = \langle w' \otimes \overline{w}', {}^{V}Y(u \otimes \overline{u}, z)v \otimes \overline{v}\rangle. \tag{3.6}$$

Aus (3.5) folgt, daß $\langle w', {}^{W}Y(u, z)v\rangle$ eine in z rationale Funktion ist, d.h. die Laurententwicklung von ${}^{W}Y$ in 0 ist wohldefiniert. $\square$

Insbesondere stimmt ${}^{W}Y|_{W_{(0)}}$ mit der $W_{(0)}$-Modulstruktur auf W überein, welche auch ohne Rückgriff auf die Intertwinerräume definiert werden kann. Würde man andererseits ${}^{W}Y$ durch Gleichung (3.6) definieren, wäre es schwieriger das folgende Resultat zu beweisen.

Satz 3.1.3 *Das Tupel* $(W, {}^{W}Y, \mathbf{1}, \omega')$ *mit dem in (3.4) definierten Vertexoperator* ${}^{W}Y$ *ist eine „schöne" SVOA vom Rang* $c - \frac{k}{2}$.

Beweis: Da ${}^{W}Y$ als direkte Summe von U-Intertwinern geschrieben ist, sind alle Axiome bis auf die Jacobi Identität klar.

Die Jacobi Identität für SVOAs ist bei Annahme der übrigen Axiome nach [DL93], Prop. 7.16, äquivalent zur verallgemeinerten Rationalität und Kommutativität und zu zwei Bedingungen an L_0 und L_1. Bis auf die Kommutativität sind diese offensichtlich erfüllt.

Zu zeigen ist somit für alle w, u, v in $W_{(0)}$ oder $W_{(1)}$ bzw. w' in $W'_{(0)}$ oder $W'_{(1)}$ die Identität

$$\langle w', {}^{W}Y(u, z_1){}^{W}Y(v, z_2)w\rangle = (-1)^{|u||v|}\langle w', {}^{W}Y(v, z_2){}^{W}Y(u, z_1)w\rangle \tag{3.7}$$

zwischen rationalen Funktionen in z_1 und z_2. Wegen Definition (3.4) verschwinden beide Seiten von (3.7), falls $|w'| \not\equiv |u| + |v| + |w| \pmod 2$ ist. Mit dem gleichen Argument wie beim Beweis der vorangehenden Lemmas findet man Elemente $\overline{w}$, $\overline{u}$, $\overline{v} \in L_{(0)} \oplus L_{(1)}$ bzw. $\overline{w}' \in L'_{(0)} \oplus L'_{(1)}$ mit

$$|u| = |\overline{u}|, \quad |v| = |\overline{v}|, \quad |w| = |\overline{w}| \quad \text{und} \quad |w'| = |\overline{w'}| \tag{3.8}$$

und

$$\langle \overline{w}', {}^{L}Y(\overline{u}, z_1){}^{L}Y(\overline{v}, z_2)\overline{w}\rangle = (-1)^{|\overline{u}||\overline{v}|}\langle \overline{w}', {}^{L}Y(\overline{v}, z_2){}^{L}Y(\overline{u}, z_1)\overline{w}\rangle \neq 0. \tag{3.9}$$

Sei also $|w'| \equiv |u| + |v| + |w| \pmod 2$ und seien die $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, $\overline{w}'$ so gewählt, daß sie die Bedingungen (3.8) und (3.9) erfüllen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} & \langle w', {}^{W}Y(u, z_1){}^{W}Y(v, z_2)w\rangle \cdot \langle \overline{w}', {}^{L}Y(\overline{u}, z_1){}^{L}Y(\overline{v}, z_2)\overline{w}\rangle \\ = \; & \langle w' \otimes \overline{w}', ({}^{W}Y(u, z_1) \otimes {}^{L}Y(\overline{u}, z_1))({}^{W}Y(v, z_2) \otimes {}^{L}Y(\overline{v}, z_2))w \otimes \overline{w}\rangle \end{aligned}$$

nach Definition von ${}^{W}Y$

$$= \langle w' \otimes \overline{w}', {}^V Y(u \otimes \overline{u}, z_1) {}^V Y(v \otimes \overline{v}, z_2) w \otimes \overline{w} \rangle$$

wegen der Jacobi Identität von V

$$= \langle w' \otimes \overline{w}', {}^V Y(v \otimes \overline{v}, z_2) {}^V Y(u \otimes \overline{u}, z_1) w \otimes \overline{w} \rangle$$

nach Definition von ${}^W Y$

$$\begin{aligned}
&= \langle w' \otimes \overline{w}', ({}^W Y(v, z_2) \otimes {}^L Y(\overline{v}, z_2))({}^W Y(u, z_1) \otimes {}^L Y(\overline{u}, z_1)) w \otimes \overline{w} \rangle \\
&= \langle w', {}^W Y(v, z_2) {}^W Y(u, z_1) w \rangle \cdot \langle \overline{w}', {}^L Y(\overline{v}, z_1) {}^L Y(\overline{u}, z_2) \overline{w} \rangle \\
&= \langle w', {}^W Y(v, z_2) {}^W Y(u, z_1) w \rangle \cdot (-1)^{|\overline{u}||\overline{v}|} \langle \overline{w}', {}^L Y(\overline{u}, z_2) {}^L Y(\overline{v}, z_1) \overline{w} \rangle.
\end{aligned}$$

Hieraus erhält man schließlich wegen der Bedingungen (3.8) und (3.9) die zu zeigende Gleichung (3.7). $\square$

Vermutung 3.1.4 *Ist die VOA V selbstdual, so ist die so erhaltene SVOA W rational, selbstdual und „sehr schön“. Die Unter-VOA $W_{(0)}$ besitzt (falls $W_{(1)} \neq 0$) zusätzlich zu $W_{(0)}$ und $W_{(1)}$ noch die irreduziblen Moduln $W_{(2)}$ (und $W_{(3)}$, falls k gerade). Ist weiter V unitär, so ist es auch W.*

Liegt die V-UnterVOA $L^k = V_{\mathbf{SO}(k)}$ in einer V-UnterVOA $L^l = V_{\mathbf{SO}(l)}$ für ein $l > k$ (von der natürlichen Einbettung $\mathbf{SO}(k) \subset \mathbf{SO}(l)$ herkommend), so läßt sich der Zusammenhang zwischen der wie oben mit L^k konstruierten SVOA W und der mit L^l konstruierten SVOA W' leicht beschreiben. Dazu betrachte man die folgende Zerlegung von $V_{\text{Fermi}}^{\otimes l}$ in den geraden und den ungeraden Anteil:

$$\begin{aligned}
V_{\text{Fermi}}^{\otimes l} &= V_{\text{Fermi}}^{\otimes l-k} \otimes V_{\text{Fermi}}^{\otimes l} = L_{(0)}^l \oplus L_{(1)}^l \\
&= (L_{(0)}^{l-k} \otimes L_{(0)}^k \oplus L_{(1)}^{l-k} \otimes L_{(1)}^k) \oplus (L_{(0)}^{l-k} \otimes L_{(1)}^k \oplus L_{(1)}^{l-k} \otimes L_{(0)}^k).
\end{aligned}$$

Mit $W'_{(0)} = \mathrm{Com}_V(L^l)$ können wir daher V wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned}
V &= \bigoplus_{a=0,1,2(,3)} W'_{(a)} \otimes L_{(a)}^l \\
&= W'_{(0)} \otimes (L_{(0)}^{l-k} \otimes L_{(0)}^k \oplus L_{(1)}^{l-k} \otimes L_{(1)}^k) \oplus W'_{(1)} \otimes (L_{(0)}^{l-k} \otimes L_{(1)}^k \oplus L_{(1)}^{l-k} \otimes L_{(0)}^k) \oplus \cdots \\
&= (W'_{(0)} \otimes L_{(0)}^{l-k} \oplus W'_{(1)} \otimes L_{(1)}^{l-k}) \otimes L_{(0)}^k \oplus (W'_{(0)} \otimes L_{(1)}^{l-k} \oplus W'_{(1)} \otimes L_{(0)}^{l-k}) \otimes L_{(1)}^k \oplus \cdots \\
&= \bigoplus_{a=0,1,2(,3)} W_{(a)} \otimes L_{(a)}^k.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Zerlegung

$$\begin{aligned}
W &= W_{(0)} \oplus W_{(1)} \\
&= (W'_{(0)} \otimes L_{(0)}^{l-k} \oplus W'_{(1)} \otimes L_{(1)}^{l-k}) \oplus (W'_{(0)} \otimes L_{(1)}^{l-k} \oplus W'_{(1)} \otimes L_{(0)}^{l-k}) \\
&= (W' \otimes V_{\text{Fermi}}^{\otimes l-k})_{(0)} \oplus (W' \otimes V_{\text{Fermi}}^{\otimes l-k})_{(1)} = W' \otimes V_{\text{Fermi}}^{\otimes l-k}. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Es ist leicht einzusehen, daß diese Zerlegungen alle mit der jeweiligen (S)VOA-Struktur verträglich sind.

3.2 Die Konstruktion von VOAs aus SVOAs

Die umgekehrte Konstruktion von VOAs aus SVOAs ist nicht so einfach. Im Gegensatz zu der Situation bei Codes und Gittern fehlt ein „einbettender Raum" wie $\mathbf{F}_2^n$ oder $\mathbf{R}^n$, von dem der konstruierte Kandidat in natürlicher Weise die Struktur einer VOA erbt. Der der Konstruktion zu Grunde liegende Vektorraum und die zugehörige VOA-Struktur lassen sich trotzdem leicht beschreiben.

Sei also W eine selbstduale „sehr schöne" rationale SVOA vom Rang c', die nicht schon eine VOA ist. Betrachte die SVOA $V_{\text{Fermi}}^{\otimes k} = L_{(0)} \oplus L_{(1)}$ vom Rang $\frac{k}{2}$, wobei k so gewählt sei, daß $c' + \frac{k}{2} \in 8\mathbf{Z}$. Die Ränge c' und $\frac{k}{2}$ liegen dann entweder beide in $\frac{1}{2}\mathbf{Z} \setminus \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z} \setminus 2\mathbf{Z}$ oder $2\mathbf{Z}$ und die Fusionsalgebren von $L_{(0)}$ und $W_{(0)}$ sind isomorph (vgl. Satz 2.2.5). Die Summe $V := \bigoplus_{a=0,1,2(,3)} W_{(a)} \otimes L_{(a)}$ ist dann ein $W_{(0)} \otimes L_{(0)}$-Modul, der eine *ganzzahlige* Graduierung durch die Eigenwerte von ω_1 des Virasoroelement ω von $W_{(0)} \otimes L_{(0)}$ besitzt. Die Intertwinerräume

$$\begin{pmatrix} & W_{(k)} \otimes L_{(k)} & \\ W_{(i)} \otimes L_{(i)} & & W_{(j)} \otimes L_{(j)} \end{pmatrix}_{W_{(0)}\otimes L_{(0)}} \cong \begin{pmatrix} & W_{(k)} & \\ W_{(i)} & & W_{(j)} \end{pmatrix}_{W_{(0)}} \otimes \begin{pmatrix} & L_{(k)} & \\ L_{(i)} & & L_{(j)} \end{pmatrix}_{L_{(0)}}$$

sind aufgrund der Struktur der Fusionsalgebra von W und L alle null- oder eindimensional. Man kann daher geeignet normierte ${}^V\!Y_{ij}^k \in \begin{pmatrix} & W_{(k)}\otimes L_{(k)} & \\ W_{(i)}\otimes L_{(i)} & & W_{(j)}\otimes L_{(j)} \end{pmatrix}_{W_{(0)}\otimes L_{(0)}}$ (${}^V\!Y_{ij}^k \neq 0$, falls $N_{ij}^k = 1$) wählen und schließlich

$${}^V\!Y = \bigoplus_{i,j,k=0,1,2(,3)} {}^V\!Y_{ij}^k$$

setzen.

Wenn die SVOA W schon eine VOA ist, setzen wir $V = W \otimes V_{D_k^+}$, wobei $V_{D_k^+} \cong L_{(0)}^k \oplus L_{(2)}^k$ die selbstduale VOA zum für $k \in 8\mathbf{Z}$ geraden selbstdualen Gitter D_k^+ ist.

Vermutung 3.2.1 *Das Tupel* $(V, {}^V\!Y, \mathbf{1}, \omega)$ *wird so zu einer selbstdualen „schönen" rationalen VOA. Ist weiter W unitär, so ist es auch V.*

Die Konstruktion von V ist für $c' \in \mathbf{Z}$ unabhängig von der gemachten Auswahl zwischen $W_{(2)}$ und $W_{(3)}$, da $L_{(2)}$ und $L_{(3)}$ durch einen äußeren Automorphismus von $\mathbf{so}(2l) = D_l$, $l = \frac{k}{2} \in \mathbf{Z}$, der auf der Fusionsalgebra von $L_{(0)}$ operiert, vertauscht werden.

Wenn wir die beiden Vermutungen 3.1.4 und 3.2.1 als richtig voraussetzen, so ist klar, daß die Konstruktionen von VOAs zu SVOAs und umgekehrt von SVOAs zu VOAs invers zueinander sind. Man erhält genauer eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von selbstdualen SVOAs W vom Rang c' und den Isomorphieklassen von Paaren $(V, V_{\mathbf{SO}(k)})$, wobei V eine selbstduale VOA vom Rang $c = c' + \frac{k}{2} \in 8\mathbf{Z}$ und $V_{\mathbf{SO}(k)}$ eine Unter-VOA vom Rang $\frac{k}{2}$ ist (zusammen mit der Auswahl des $V_{\mathbf{SO}(k)}$-Moduls $L_{(1)}$, falls $k = 8$

ist). Isomorphieklasse des Paares $(V, V_{\mathbf{SO}(k)})$ bedeutet Fixierung der Isomorphieklasse von V und dann Wahl der Unter-VOA $V_{\mathbf{SO}(k)}$ bis auf Äquivalenz unter Aut(V), den Automorphismen von V. (Falls $k = 8$, muß die Operation von der Untergruppe von Aut(V), die $V_{\mathbf{SO}(8)}$ fixiert, auf den drei $V_{\mathbf{SO}(8)}$-Moduln betrachtet werden: Zwei Auswahlen von $V_{\mathbf{SO}(8)}$-Moduln sind äquivalent, falls ein Automorphismus sie ineinander überführt.) Wenn die SVOA W schon eine VOA ist, so ist diese Beziehung offenbar auch richtig.

Verwendet man noch Satz 2.2.8 und Zerlegung (3.10), so kann man die Klassifikation der selbstdualen SVOAs mit $W_{1/2} = 0$ auf die Bestimmung der *maximalen* $V_{\mathbf{SO}(k)}$-Unteralgebren von V zurückführen, da diese das erste Glied in der Folge W, $W \otimes V_{\mathrm{Fermi}}$, $W \otimes V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes 2}$, ... bilden.

Die Konstruktionen aus diesem Abschnitt sind in dieser Arbeit allerdings nur skizziert, und Teilschritte sind noch zu beweisen. Evt. müssen außer selbstdual (sehr) „schön" unitär und rational noch weitere technische Forderungen an die (S)VOAs gestellt werden. Sicherlich ist aber die Klasse von (S)VOAs, für die die Überlegungen dieses Kapitels gelten, diejenige, die interessant ist und die man betrachten sollte.

Wir formulieren den beschriebenen Zusammenhang noch als

Vermutung 3.2.2 *Es besteht eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Isomorphieklassen von selbstdualen „sehr schönen" unitären rationalen SVOAs vom Rang c' und den Isomorphieklassen von selbstdualen „schönen" unitären rationalen VOAs vom Rang c zusammen mit einer Unter-VOA $V_{\mathbf{SO}(k)}$ vom Rang $\frac{k}{2} = c - c'$ (und Auswahl eines $V_{\mathbf{SO}(k)}$-Moduls falls $k = 8$).*

Es ist einfach, die Berechnung der Automorphismengruppe von W auf das Studium der Operation der Automorphismengruppe von V auf der Unteralgebra $V_{\mathbf{SO}(k)}$ zurückzuführen. Wir werden dies hier nicht genauer untersuchen, sondern im nächsten Kapitel nur den dort benötigten Zusammenhang zwischen den Automorphismengruppen von $V^\natural$ und $VB^\natural$ beschreiben.

Beispiele für die Beziehung zwischen VOAs und SVOAs:
Wenn $k \geq 3$ ist, wird die VOA $L = V_{\mathbf{SO}(k)}$ von den Elementen aus $(V_{\mathbf{SO}(k)})_1 \cong \mathbf{so}(k)$ erzeugt. Die Klassifikation von VOA-Unteralgebren $V_{\mathbf{SO}(k)}$ in V kann daher im wesentlichen auf die Klassifikation von Lieunteralgebren $\mathbf{so}(k)$ in der reduktiven Liealgebra $V_1 = g$ zurückgeführt werden (vgl. [Fuc92], Abschnitte 1.8, 2.8, 3.8 und [MP81, Dyn57]).

Bereich $0 \leq c < 8$*:* Wir erhalten so wieder das Resultat aus Korollar 2.2.7: Wählen wir Rang $V = 8$, so existiert nur die VOA $V_{E_8} \cong V_{E_{8,1}}$. In der Liealgebra E_8 gibt es bis auf Isomorphie nur eine Klasse von regulären (konformen) Einbettungen der $\mathbf{so}(k)$, $k \geq 3$ (vgl. [MP81]). Die $\mathbf{so}(16) \cong D_8$ ist maximal. Für $0 \leq c \leq 6\frac{1}{2}$ gilt daher $W \cong V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes 2c}$. Für

$c = 7$ und $c = 7\frac{1}{2}$ ist es einfacher, die beiden VOAs vom Rang 16 zu betrachten: $V_{E_8 \times E_8}$ und $V_{D_{16}^+}$. In $E_8 \times E_8$ ist eine $\mathbf{so}(k)$, $k > 16$ nicht einbettbar, und in D_{16} ist die $\mathbf{so}(32)$ auch maximal, d.h. auch für $c = 7$ oder $c = 7\frac{1}{2}$ gilt $W \cong V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes 2c}$.

Bereich $8 \leq c < 16$*:* Für den Bereich $8 \leq c \leq 16$ ist es am einfachsten, Schellekens Liste [Sch92] der selbstdualen VOAs mit Rang $c = 24$ heranzuziehen. Denn für $k \geq 9$ gibt es bis auf Isomorphie immer nur höchstens eine reguläre (konforme) maximale Einbettung von $\mathbf{so}(k)$ in eine einfache Liealgebra g (in dem Sinne, daß $\widetilde{V}_{\mathbf{SO}(k),1}$ VOA-Unteralgebra von $\widetilde{V}_1$). Wir erhalten die folgende Liste:

c	8	12	14	15	$\frac{31}{2}$
SVOA	V_{E_8}	$V_{D_{12}^+}$	$V_{(E_7+E_7)^+}$	$V_{A_{15}^+}$	$V_{E_{8,2}^+}$

(3.11)

Man überprüft leicht, daß die so erhaltenen Beispiele für $c \in \{8, 12, 14, 15\}$ mit den entsprechenden Gittertheorien (siehe Satz 1.2.7) übereinstimmen (V_{E_8} ist sogar eine VOA). Für $c = 15\frac{1}{2}$ erhält man die „neue“ SVOA $V_{E_{8,2}^+}$ — die zur Level 2 Darstellung von E_8 gehörende VOA zusammen mit dem Modul mit konformen Gewicht $\frac{1}{2}$ —, die allerdings in der physikalischen Literatur schon untersucht wurde [SY89] (zumindest die Fusionsalgebra); vgl. auch [DLM95a], Bemerkung 5.9.

Vermutung 3.2.3 *Die Liste in (3.11) enthält alle selbstdualen unzerlegbaren SVOAs in dem Bereich* $8 \leq c < 16$*.*

Unsere obigen Überlegungen haben zumindest das folgende gezeigt:

Satz 3.2.4 *Die Liste der in (3.11) angegebenen selbstdualen unzerlegbaren SVOAs für den Bereich* $8 \leq c < 16$ *ergibt sich aus der Annahme der Umkehrvermutung 3.2.2 und der Vermutung 2.1.4 für* $c = 16$ *bzw.* $c = 24$*.*

Die Klassifikation der selbstdualen SVOAs für den Bereich $16 \leq c < 24$ ist mit Hilfe von Schellekens Liste [Sch92] ebenfalls möglich. Für $V \neq V^\natural$ ist dies, wie schon oben gesehen, auf die Klassifikation von Einbettungen der Liealgebra $\mathbf{so}(k)$ in die Liealgebra V_1 zurückführbar. Dies wird in einer separaten Arbeit genauer ausgeführt [Höh]. Im besonders interessanten Fall des Mondscheinmoduls $V^\natural$ ist $V_1^\natural = 0$, und daher ist eine maximale Unter-VOA höchstens eine $V_{\mathbf{SO}(1)}$. Tatsächlich läßt sich eine Äquivalenzklasse von zur $(c, h) = (\frac{1}{2}, 0)$-Höchstgewichtsdarstellung der Virasoroalgebra assozierten Unter-VOAs $L_{1/2}(0) \cong V_{\mathbf{SO}(1)}$ finden. Die auf diese Weise erhaltene Babymonster-SVOA $VB^\natural$ wird im nächsten Kapitel genauer untersucht werden.

Chapter 4

Die Babymonster Vertexoperator-Superalgebra

Das Ziel dieses Kapitels ist die Konstruktion einer SVOA $VB^\natural$ vom Rang $23\frac{1}{2}$ auf der das Babymonster B durch Automorphismen operiert. Diese SVOA ist das Analogon des kürzeren Golay Codes g_{22} (s. [PS75]) bzw. des kürzeren Leechgitters O_{23} (s. [CS82]), welche eine zweifache Erweiterung der Mathieu Gruppe M_{22} bzw. der Conway Gruppe Co_2 als Automorphismengruppe besitzen. So wie g_{22} keine Tetraden (Vektoren vom Gewicht 4) und O_{23} keine Wurzeln (Vektoren der Quadratlänge 2) besitzt, so enthält $VB^\natural$ keine nichttriviale Lie Unteralgebra V_1 (Vektoren vom konformen Gewicht 1). Die SVOA $VB^\natural$ ist das natürliche Objekt, auf dem $B \times \mathbf{Z}_2$ durch Automorphismen operiert, und in diesem Sinne liefert sie die natürlichste Definition des Babymonsters.

In Abschnitt 4.2 wird $VB^\natural$ aus dem Mondscheinmodul $V^\natural$ unter Verwendung der Methoden des vorherigen Kapitels konstruiert. Dazu wird in Abschnitt 4.1 eine Beschreibung von Virasoro Untervertexoperator-Algebren vom Rang $\frac{1}{2}$ in $V^\natural$ gegeben.

4.1 Zerlegung des Mondscheinmoduls $V^\natural$ unter $L_{1/2}^{\otimes 48}(0)$

Der Mondscheinmodul kann, da $V_1^\natural = 0$, nicht in eine Summe von Höchstgewichtsdarstellungen von affinen Kac-Moody Algebren zerlegt werden. Wie Dong, Mason und Zhu in [DMZ94] gezeigt haben, kann man aber 48 paarweise zur $c = \frac{1}{2}$ unitären Höchstgewichtsdarstellung der Virasoroalgebra assozierte kommutierende Unter-VOAs $L_{1/2}(0)$ vom Rang $\frac{1}{2}$ finden. Die Monster-VOA zerlegt sich dann als direkte Summe von VOA-Moduln von $L_{1/2}^{\otimes 48}(0)$. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, daß dieses Resultat auch aus einer Arbeit [MN93] von W. Meyer und W. Neutsch über assoziative

Unteralgebren der Griess Algebra folgt. Weiter geben wir mit Hilfe von Invariantentheorie eine neue genauere Beschreibung der Zerlegung von $V^\natural$.

Die 196884-dimensionale kommutative nicht assoziative Griess Algebra $\mathcal{B}$ [Gri82] ist der Gewicht 2 Anteil $V_2^\natural$ des Mondscheinmoduls. Für zwei Elemente a, $b \in \mathcal{B}$ ist das Algebraprodukt von $\mathcal{B}$ gegeben durch $a \times b = a_1 b$ und die nichtsinguläre symmetrische Bilinearform $\langle .,. \rangle$ durch $a_3 b = \langle a, b \rangle \cdot \mathbf{1}$. Sie stimmt mit der in Satz 1.1.4 beschriebenen invarianten symmetrischen Bilinearform überein, d.h. es gilt

$$\langle a \times b, c \rangle = \langle a, b \times c \rangle$$

für Elemente a, b, $c \in \mathcal{B}$. Das Einselement von $\mathcal{B}$ ist $e = \frac{1}{2}\omega$, die Hälfte des Virasoroelementes, und hat die Norm $\langle e, e \rangle = \frac{1}{4} \cdot \omega_3 \omega = \frac{c}{8} = 3$ (vgl. [FLM88], Prop. 10.3.6). Da $V_1^\natural = 0$, gilt noch $a_2 b = 0$.

Die Struktur von assoziativen Unteralgebren von $\mathcal{B}$ wurde in [MN93] untersucht. Wir fassen die dort erhaltenen allgemeinen Strukturresultate zusammen in

Satz 4.1.1 (Meyer, Neutsch) *Sei $\mathcal{U}$ eine k-dimensionale assoziative Unteralgebra (der reellen Form) der Griess Algebra $\mathcal{B}$. Dann gilt*

1) $\mathcal{U}$ ist isomorph zu einer direkten Summe von k Kopien von $\mathbf{R}$: $\mathcal{U} \cong \mathbf{R}^k$.

2) $\mathcal{U}$ enthält eine Basis von k paarweise sich annihilierenden idempotenten Elementen a_i die orthogonal zueinander sind: $a_i \times a_j = 0$ und $\langle a_i, a_j \rangle = 0$ für alle $1 \leq i, j \leq k$ mit $i \neq j$.

3) Die idempotenten Elemente von $\mathcal{U}$ sind genau die 2^k Elemente $a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_\nu}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_v \leq k$, wobei $\{a_1, \ldots a_k\}$ die einzige Orthogonal Basis unter ihnen ist. Die a_1, …, a_k heißen daher die Fundamental-Idempotenten von $\mathcal{U}$.

4) $\mathcal{U}$ ist genau dann maximal assoziativ, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

a) Das Einselement e von $\mathcal{B}$ liegt in $\mathcal{U}$.

b) Die Fundamental-Idempotenten a_1, $\cdots$, a_k sind unzerlegbar, d.h. sie lassen sich nicht als Summe von zwei oder mehr von Null verschiedenen Idempotenten schreiben.

Der Beweis beruht im wesentlichen auf der Nortonungleichung [Con84]

$$\langle a \times a, b \times b \rangle \geq \langle a \times b, a \times b \rangle$$

für Elemente a, b aus $\mathcal{B}$.

Eine Verbindung zwischen assoziativen Unteralgebren von $\mathcal{B}$ und Unter-VOAs von $V^\natural$ stellt nun der folgende Satz her.

Satz 4.1.2 [1] *Sei $\mathcal{U}$ eine k-dimensionale maximale assoziative Unteralgebra der Griess Algebra $\mathcal{B}$ mit den Fundamental-Idempotenten $a_1, \ldots, a_k$. Dann bildet der von den Komponenten $(2a_i)_n$ des Vertexoperators $Y(2a_i, z)$ vom Vakuum $\mathbf{1}$ erzeugte Untervektorraum von $V^\natural$ eine zur Virasoroalgebra assozierte Unter-VOA mit Virasoroelement $\omega_i = 2a_i$ vom Rang $c_i = 8\langle a_i, a_i\rangle$. Diese k Unter-VOAs kommutieren paarweise, und ihr Tensorprodukt ist eine Unter-VOA von $V^\natural$ mit dem gleichen Virasoroelement $\omega = \sum_{i=1}^k \omega_i$ wie $V^\natural$.*

Beweis: Für ein Idempotent $a \in \mathcal{B}$ gilt $a_3 a = a$ und $a_2 a = 0$. Nach Satz 1.2.2 erzeugen die Koeffizienten von $Y(2a, z)$ daher eine Unter-VOA vom Rang $8\langle a, a\rangle$, die zu einer Darstellung der Virasoroalgebra assoziert ist. Für zwei Virasoroelemente $\omega_i \neq \omega_j$ gilt aus Dimensionsgründen $(\omega_i)_2\omega_j = 0$ und $(\omega_i)_n\omega_j = 0$ für $n \geq 4$. Nach Voraussetzung und Satz 4.1.1, 2) gilt $(\omega_i)_1\omega_j = (\omega_i)_3\omega_j = 0$. Der Vektor ω_j ist daher ein Höchstgewichtsvektor vom Höchstgewichts $h = 0$ für die von den Koeffizienten $L_i(n) := (\omega_i)_{n+1}$ von $Y(\omega_i, z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}}(\omega_i)_n z^{-n-1}$ erzeugte Virasoroalgebra Vir_i. Der von ω_j erzeugte Vir_i-Untermodul von $V^\natural$ ist unitär und muß daher zu einem Quotienten des Virasoromoduls $M_c = \mathcal{U}(Vir^-)\mathbf{1}/\langle L_{-1}\mathbf{1}\rangle$ isomorph sein. Für diesen Vakuummodul gilt aber $L_i(-1)\omega_j = (\omega_i)_0(\omega_j) = 0$. Die Kommutatorformel (vgl. [FHL93] (2.3.1)) liefert nun $[Y(\omega_i, z_1), Y(\omega_j, z_2)] = \mathrm{res}_{z_0} z_2^{-1}\delta(\frac{z_1-z_0}{z_2})Y(Y(\omega_i, z_0)\omega_j, z_2) = 0$, da $\sum_{n\geq 0}(\omega_i)_n\omega_j z_0^{-n-1} = 0$ und nur diese singulären Terme bei der Berechnung des Residuums berücksichtigt werden. Die linearen Abbildungen $(\omega_i)_n$ und $(\omega_j)_n$ kommutieren somit für alle m, $n \in \mathbf{Z}$. Dann kommutieren aber auch alle Vertexoperatoren der von ω_i und ω_j erzeugten Unter-VOAs, denn diese lassen sich nach Satz 1.2.2 durch die $(\omega_i)_m$ bzw. $(\omega_j)_n$ ausdrücken. □

Da $V^\natural$ unitär ist, sind die zu den Idempotenten gehörigen Unter-VOAs entweder die VOAs zu den Virasorohöchstgewichtsdarstellungen $M_c = \mathcal{U}(Vir^-)\mathbf{1}/\langle L_{-1}\mathbf{1}\rangle$ $(c \geq 1)$ oder die unitären Darstellungen $L_c(0) = M_c/I_c$ der minimalen Serie, wobei hier für den Rang nur die Werte $c = 1 - \frac{6}{n(n+1)}$, $n = 3, 4, \ldots$ zulässig sind (s. [Lan88] oder [CdG94], Kap. 12). Der kleinste mögliche Wert ist $c = \frac{1}{2}$, und wir erhalten das schon in [MN93] vermutete

Korollar 4.1.3 *Die Dimension einer assoziativen Unteralgebra der Griess Algebra ist höchstens* 48.

Die einzige bekannte Klasse von Idempotenten mit minimaler Norm $\frac{1}{16}$ liefern die *Transpositions-Idempotenten* (vgl. [Con84, CCN+85, MN93]): Zu jeder Involution α vom

[1] Der Zusammenhang zwischen Idempotenten in $\mathcal{B}$ und Virasoroalgebren ist auch in [Miy] betrachtet worden.

Typ $2A$ im Monster („Transpositionen“) gibt es ein als axialen Vektor t_α bezeichnetes Element in der Griess Algebra. Das zugehörige Transpositions-Idempotent ist dann $i_\alpha = \frac{1}{64} t_\alpha$. Auf der Menge $\{i_\alpha\} \subset \mathcal{B}$ der Transpositions-Idempotenten operiert M so, wie es auf der Menge $\{\alpha\} \subset M$ der $2A$-Involutionen durch Konjugation operiert. Zwei Transpositions-Idempotente i_α und i_β annihilieren sich gegenseitig genau dann, wenn $\alpha\beta$ eine Involution vom Typ $2B$ in M ist. Es gilt nun der

Satz 4.1.4 ([MN93] und [DMZ94]) *Es gibt 48-dimensionale assoziative Unteralgebren in $\mathcal{B}$ mit Transpositions-Idempotenten als Fundamental-Idempotente.*

Nach [Nor82, GMS89] operiert das Monster als Rang 9 Permutationsgruppe auf den $2A$-Involutionen, und die Bahnen von Paaren von Involutionen sind durch die M-Konjugationsklassen ihres Produktes gegeben, d.h. alle Paare (α, β) mit $\alpha \cdot \beta$ in $2B$ sind unter M äquivalent. Daher sind auch alle Paare (i_α, i_β) von kommutierenden Transpositions-Idempotenten i_α und i_β äquivalent.

Die Konstruktion von 48-Tupel S von Transpositions-Idempotenten wie in Satz 4.1.4 bzw. äquivalent dazu 48-Tupel von $2A$-Involutionen in M, deren paarweises Produkt eine $2B$-Involution ist, ist modulo der Operation von M hingegen nicht eindeutig. Betrachten wir den Monstergraphen, dessen Ecken die $2A$-Involutionen sind und dessen Kanten mit der M-Konjugationsklasse des Produktes der Ecken gefärbt sind, so interessieren wir uns für die Orbiten vollständiger Untergraphen vom Kantentyp $2B$. Diese gruppentheoretische Umformulierung sollte mit gruppentheoretischen Methoden zu beantworten sein (vgl. [Nor82, Iva94, CM95]). Sei nun ein festes 48-Tupel S fixiert.

Wegen Satz 4.1.4, Satz 4.1.2 und Satz 1.1.13 zerlegt sich $V^\natural$ als direkte Summe von $L_{1/2}^{\otimes 48}(0)$-Moduln:

$$V^\natural = \bigoplus_{h_1,\ldots,h_{48} \in \{0,\frac{1}{2},\frac{1}{16}\}} c_{h_1,\ldots,h_{48}}\, L_{1/2}(h_1,\ldots,h_{48}), \tag{4.1}$$

wobei $L_{1/2}(h_1,\ldots,h_{48}) = L_{1/2}(h_1) \otimes \ldots \otimes L_{1/2}(h_{48})$ das 48-fache Tensorprodukt von den drei irreduziblen $L_{1/2}(0)$-Moduln $L_{1/2}(0)$, $L_{1/2}(\frac{1}{2})$ und $L_{1/2}(\frac{1}{16})$ ist.

Seien i, j und k nichtnegative Zahlen mit $i + j + k = 48$. Wir sagen, daß der Modul $L_{1/2}(h_1,\cdots,h_{48})$ den Typ (i,j,k) hat, falls $\#\{\nu \mid h_\nu = 0\} = i$, $\#\{\nu \mid h_\nu = \frac{1}{2}\} = j$ und $\#\{\nu \mid h_\nu = \frac{1}{16}\} = k$ ist. Die Vielfachheit $m_{i,j,k}$, mit der $L_{1/2}^{\otimes 48}(0)$-Moduln vom Typ (i,j,k) in $V^\natural$ vorkommen, ist dann

$$m_{i,j,k} = \sum_{\substack{h_1,\ldots,h_{48} \in \{0,\frac{1}{2},\frac{1}{16}\} \\ \#\{\nu | h_\nu = \frac{1}{2}\} = j \\ \#\{\nu | h_\nu = \frac{1}{16}\} = k}} c_{h_1,\ldots,h_{48}}. \tag{4.2}$$

Schließlich setzen wir noch

$$P^S_{V^\natural}(a,b,c) = \sum_{\substack{i,j,k\in\mathbf{Z}_+\\ i+j+k=48}} m_{i,j,k}\, a^i b^j c^k \qquad (4.3)$$

und bezeichnen dieses homogene Polynom vom Grad 48 als das $L_{1/2}(0)$-Gewichtszählerpolynom von $V^\natural$ bezüglich S, da seine Koeffizienten die Anzahl der linear unabhängigen Virasorohöchstgewichtsvektoren von einem bestimmten Typ zählen. Dieses Polynom hängt tatsächlich von der Auswahl von S ab. Um im nächsten Abschnitt den Charakter der Babymonster-SVOA berechnen zu können, benötigen wir den

Satz 4.1.5 *Bei Wahl des Systems S von 48 Transpositions-Idempotenten wie in [DMZ94] erhält man für das $L_{1/2}(0)$-Gewichtszählerpolynom von $V^\natural$:*

$$\begin{aligned}
&P^S_{V^\natural}(a,b,c) = a^{48} + b^{48} + 804\,(a^{44}\,b^4 + a^4\,b^{44}) + 10560\,(a^{42}\,b^6 + a^6\,b^{42}) + 174306\,(a^{40}\,b^8 + a^8\,b^{40}) +\\
&1615680\,(a^{38}\,b^{10} + a^{10}\,b^{38}) + 16382612\,(a^{36}\,b^{12} + a^{12}\,b^{36}) + 116707584\,(a^{34}\,b^{14} + a^{14}\,b^{34}) +\\
&554455407\,(a^{32}\,b^{16} + a^{16}\,b^{32}) + 1786512640\,(a^{30}\,b^{18} + a^{18}\,b^{30}) + 4077522504\,(a^{28}\,b^{20} + a^{20}\,b^{28}) +\\
&6680893824\,(a^{26}\,b^{22} + a^{22}\,b^{26}) + 7891186524\,a^{24}\,b^{24} +\\
&\Big(1536\,(a^{37}\,b^3 + a^3\,b^{37}) + 155136\,(a^{35}\,b^5 + a^5\,b^{35}) + 4773888\,(a^{33}\,b^7 + a^7\,b^{33}) +\\
&70699008\,(a^{31}\,b^9 + a^9\,b^{31}) + 596299776\,(a^{29}\,b^{11} + a^{11}\,b^{29}) + 3100876800\,(a^{27}\,b^{13} + a^{13}\,b^{27}) +\\
&10370684928\,(a^{25}\,b^{15} + a^{15}\,b^{25}) + 22879881216\,(a^{23}\,b^{17} + a^{17}\,b^{23}) +\\
&33843588096\,(a^{21}\,b^{19} + a^{19}\,b^{21})\Big)\,c^8 +\\
&\Big(16512\,(a^{30}\,b^2 + a^2\,b^{30}) + 1112832\,(a^{28}\,b^4 + a^4\,b^{28}) + 28038528\,(a^{26}\,b^6 + a^6\,b^{26}) +\\
&325307904\,(a^{24}\,b^8 + a^8\,b^{24}) + 1996192896\,(a^{22}\,b^{10} + a^{10}\,b^{22}) + 6985020672\,(a^{20}\,b^{12} + a^{12}\,b^{20}) +\\
&14585195904\,(a^{18}\,b^{14} + a^{14}\,b^{18}) + 18596004864\,a^{16}\,b^{16}\Big)\,c^{16} +\\
&\Big(168960\,(a^{23}\,b + a\,b^{23}) + 14306304\,(a^{21}\,b^3 + a^3\,b^{21}) + 300432384\,(a^{19}\,b^5 + a^5\,b^{19}) +\\
&2446205952\,(a^{17}\,b^7 + a^7\,b^{17}) + 9241528320\,(a^{15}\,b^9 + a^9\,b^{15}) + 17642698752\,(a^{13}\,b^{11} + a^{11}\,b^{13})\Big)\,c^{24} +\\
&\Big(9024\,(a^{16}+b^{16}) + 941568\,(a^{14}\,b^2 + a^2\,b^{14}) + 14445312\,(a^{12}\,b^4 + a^4\,b^{12}) + 63361536\,(a^{10}\,b^6 + a^6\,b^{10}) +\\
&102007680\,a^8\,b^8\Big)\,c^{32} + \Big(135168\,(a^7\,b + a\,b^7) + 946176\,(a^5\,b^3 + a^3\,b^5)\Big)\,c^{40} + 2048\,c^{48}.
\end{aligned}$$

Beweis: Nach Satz 1.4.2 definiert der konforme Block einer „schönen“ rationalen VOA mit k irreduziblen Moduln eine k-dimensionale Darstellung von $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Die Darstellung $\rho : \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbf{C}^3)$ für die VOA $L_{1/2}(0)$ war in (2.6) bzw. (2.7) beschrieben worden. Für $L_{1/2}^{\otimes 48}(0)$ erhält man die Darstellung $\rho^{\otimes 48} : \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{End}((\mathbf{C}^3)^{\otimes 48})$. Der konforme Block von $V^\natural$ ist wegen der Selbstdualität des Mondscheinmoduls [Don94] und Rang $V^\natural = 24$ der triviale eindimensionale $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-Modul. Die Restriktion der Vertexoperatorabbildung $Y(.,z) : V^\natural \longrightarrow \mathrm{End}(V^\natural)[[z,z^{-1}]]$ auf $L_{1/2}^{\otimes 48}(0)$ definiert eine $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-äquivariante Einbettung des konformen Blockes von $V^\natural$ in den von $L_{1/2}^{\otimes 48}(0)$, d.h. wir erhalten ein Element $\widetilde{P}$ in $\left((\mathbf{C}^3)^{\otimes 48}\right)^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})}$. Das Gewichtzählerpolynom $P^S_{V^\natural}(a,b,c)$ ist gerade die Projektion von $\widetilde{P}$ in den Grad-48-Anteil der $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-Invarianten der symmetrischen Algebra $\mathrm{Sym}^*(\rho)$. Um $P^S_{V^\natural}(a,b,c)$ zu berechnen, muß man also die unter der Operation von $\rho(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}))$ invarianten Polynome in den 3 Variablen a, b und c betrachten. Die Gruppe $G := \rho(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})) = \langle \rho(S), \rho(T) \rangle$ hat die Ordnung 1152. Die Dimension der G-invarianten Polynome ist durch den folgenden Satz von Molien (vgl. [MS77]) gegeben:

$$\rho_G(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \dim \left(\mathrm{Sym}^n(\rho)^G \right) t^n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - g\, t)}.$$

Man erhält[2]

$$\begin{aligned} \rho_G(t) \;\; = \;\; & 1 + t^3 + t^6 + t^9 + t^{12} + t^{15} + t^{18} + t^{21} + \\ & +3\,t^{24} + 3\,t^{27} + 3\,t^{30} + 3\,t^{33} + 3\,t^{36} + 3\,t^{39} + 3\,t^{42} + 3\,t^{45} + 7\,t^{48} + \cdots . \end{aligned}$$

Die folgenden Polynome sind invariant unter G:

$p_1 = a^2\, c - b^2\, c$,

$p_2 = -(a^{23}\, b + a\, b^{23}) + (a^{21}\, b^3 + a^3\, b^{21}) + 21\,(a^{19}\, b^5 + a^5\, b^{19}) - 85\,(a^{17}\, b^7 + a^7\, b^{17})$
$+134\,(a^{15}\, b^9 + a^9\, b^{15}) - 70\,(a^{13}\, b^{11} + a^{11}\, b^{13}) + \Big(-2\,(a^{16}\, c^8 + b^{16}) - 240\,(a^{14}\, b^2 + a^2\, b^{14})$
$-3640\,(a^{12}\, b^4 + a^4\, b^{12}) - 16016\,(a^{10}\, b^6 + a^6\, b^{10}) - 25740\, a^8\, b^8) \Big)\, c^8$
$+\Big(256\,(a^7\, b + a\, b^7) + 1792\, a^5\, b^3 + a^3\, b^5)\Big)\, c^{16}$,

$p_3 = 3\,(a^{23}\, b + a\, b^{23}) + 253\,(a^{21}\, b^3 + a^3\, b^{21}) + 5313\,(a^{19}\, b^5 + a^5\, b^{19}) + 43263\,(a^{17}\, b^7 + a^7\, b^{17})$
$+163438\,(a^{15}\, b^9 + a^9\, b^{15}) + 312018\,(a^{13}\, b^{11} + a^{11}\, b^{13}) - 256\, c^{24}$,

$p_4 = \chi_{V_{E_8}^{\otimes 3}} = \left(\frac{1}{2}\Big((a+b)^{16} + (a-b)^{16} \Big) + 128\, c^{16} \right)^3$. [3]

Die 7 Polynome p_1^{16}, $p_1^8\, p_2$, $p_1^8\, p_3$, p_2^2, p_3^2, $p_2\, p_3$ und p_4 sind, wie man leicht nachrechnet, linear unabhängig, bilden also eine Basis für $\mathrm{Sym}^{48}(\rho)^G$. In [DMZ94], Satz 6.5 sind die Anzahl der verschiedenen Typen von linear unabhängigen von Virasorohöchstgewichtsvektoren in $V_0^\natural$, $V_1^\natural$ und $V_2^\natural$ angeben worden (für $V_2^\natural$ allerdings fehlerhaft). Die (richtigen) Anzahlen sind

$$\begin{aligned} V_0^\natural \;\; &: \;\; m_{48,0,0} = 1, \\ V_1^\natural \;\; &: \;\; m_{46,2,0} = m_{39,1,8} = m_{32,0,16} = 0, \\ V_2^\natural \;\; &: \;\; m_{44,4,0} = \binom{24}{2} \cdot 3 - 24, \quad m_{37,3,8} = 24 \cdot 2^6, \quad m_{30,2,16} = 258 \cdot 2^6, \\ & \quad\;\; m_{23,1,24} = 24 \cdot 2^{11} + 336 \cdot 2^6 + 24 \cdot 2^{12}, \quad m_{16,0,32} = 141 \cdot 2^6. \end{aligned}$$

Leider ergeben sich hieraus nur 6 statt 7 linear unabhängige Bedingungen. Für $V_3^\natural$ erhält man zumindest die Gleichung

$$m_{7,1,40} = 9 \cdot 2^{14} - 6\, m_{0,0,48}. \tag{4.4}$$

---

[2] Z.B. unter Verwendung der Computeralgebrasysteme *GAP* [So94] und *Mathematica*.

[3] Die Vielfachheit von $L_{1/2}^{\otimes 16}(\frac{1}{16})$ in V_{E_8} ist nicht 2^8, wie in [DMZ94] angegeben, sondern richtig ist 2^7.

Betrachtet man zusätzlich die Dodekaden im Golay Code (Vektoren vom Gewicht 12), so liefern diese unter anderem mindestens $2 \cdot 2^{10}$ linear unabhängige Höchstgewichtsvektoren vom Typ $(0,0,48)$ in $V_3^\natural$ und $132 \cdot 2^{10}$ vom Typ $(7,1,40)$, d.h. es gilt $m_{0,0,48} \geq 2 \cdot 2^{10}$ und $m_{7,1,40} \geq 132 \cdot 2^{10}$. Wegen Relation (4.4) kann in beiden Ungleichungen nur das Gleichheitszeichen gelten. Damit ist eine 7-te Bedingung gefunden, man kann $P^S_{V^\natural}(a,b,c)$ vollständig berechnen und erhält das oben angegebene Polynom. $\square$

4.2 Konstruktion der Babymonster-SVOA $VB^\natural$

In diesem Abschnitt wird nun mit Hilfe von Satz 3.1.3 aus dem Mondscheinmodul $V^\natural$ die Babymonster-SVOA $VB^\natural$ konstruiert. Die hierzu benötigten rationalen Unteralgebren U und L liefert die im letzten Abschnitt betrachtete Zerlegung von $V^\natural$ bezüglich $L_{1/2}^{\otimes 48}(0)$. Wir vermuten, daß die SVOA $VB^\natural$ selbstdual, „sehr schön“, unitär und rational ist und die einzige derartige SVOA ist, die keine Clifford oder Lie Unteralgebra besitzt.

Sei $i_\alpha \in V_2^\natural$ das Transpositions-Idempotent zu einer $2A$-Involution α im Monster. Da alle Transpositions-Idempotente i_α unter M äquivalent sind, liegt i_α in einem 48-Tupel S von kommutierenden Transpositions-Idempotenten, wie es in Satz 4.1.5 betrachtet wurde. Die Numerierung der Idempotenten aus S sei so gewählt, daß $\omega_{48} = 2 \cdot i_\alpha$ das Virasoroelement des 48-ten Faktors $L_{1/2}^{(48)}(0)$ der zu S gehörigen Unteralgebra $L_{1/2}^{\otimes 48}(0) \subset V^\natural$ ist. Wir setzen für $l = 0$, 1 und 2 mit der gleichen Notation wie in (4.1)

$$K_{(l)} = \bigoplus_{\substack{h_1,\ldots,h_{48} \\ h_{48}=n_l}} c_{h_1,\ldots,h_{48}} L_{1/2}(h_1,\ldots,h_{48}), \tag{4.5}$$

wobei $n_0 = 0$, $n_1 = \frac{1}{2}$ und $n_2 = \frac{1}{16}$.

Die Struktur der Fusionsalgebra von $L_{1/2}(0)$ zeigt, daß $K_{(0)}$ eine Unteralgebra von $V^\natural$ ist, und der Mondscheinmodul die direkte Summe der drei $K_{(0)}$-Moduln $K_{(0)}$, $K_{(1)}$ und $K_{(2)}$ ist:

$$V^\natural = K_{(0)} \oplus K_{(1)} \oplus K_{(2)}. \tag{4.6}$$

Der Modul $K_{(l)}$ wird von den Eigenvektoren der Komponente $(\omega_{48})_1 \in \mathrm{End}(V^\natural)$ des Vertexoperators $Y(\omega_{48},z)$ aufgespannt, die einen Eigenwert $\lambda \equiv n_l \pmod{\mathbf{Z}}$ besitzen.

In Verallgemeinerung von [DMZ94], Prop. 5.1 (2), gilt der folgende

Satz 4.2.1 *Jede Unter-VOA R von $V^\natural$, die $L_{1/2}^{\otimes 48}(0)$ enthält, ist einfach.*

Beweis: Sei T ein von Null verschiedener R-Untermodul von R. Da $L_{1/2}^{\otimes 48}(0) \subset R$ rational ist, zerlegt sich T als direkte Summe von $L_{1/2}^{\otimes 48}(0)$-Moduln. Für Elemente u und v eines in T enthaltenen $L_{1/2}^{\otimes 48}(0)$-Moduls $L(h_1,\ldots,h_{48})$ gilt wegen der Fusionsregeln $Y(u,z)v \in$

$S[[z,z^{-1}]]$, wobei $S = \left(\bigoplus_{f_i\in\{0,\frac{1}{2}\}} c_{f_1,\ldots,f_{48}}\, L(f_1,\ldots,f_{48})\right) \cap R$ Unteralgebra von R ist. Da $V^\natural$ als adjungierter $V^\natural$-Modul irreduzibel ist, gilt nach [DL93], Prop. 11.9, $Y(u,z)v \neq 0$ für von Null verschiedene u und v, d.h. es gibt einen $L_{1/2}^{\otimes 48}(0)$-Untermodul $L(f_1,\ldots,f_{48})$ mit $f_i \in \{0,\frac{1}{2}\}$ in T. Wendet man das gleiche Argument nochmal auf Elemente u', $v' \in L(f_1,\ldots,f_{48})$ an, folgt $L_{1/2}^{\otimes 48}(0) \subset T$; insbesondere also $\mathbf{1} \in T$ und daher $T = R$, d.h. T ist irreduzibel. $\square$

Die VOA $K_{(0)}$, als adjungierter Modul aufgefaßt, ist somit irreduzibel. Darüber hinaus gilt der

Satz 4.2.2 *Der $K_{(0)}$-Modul $K_{(1)}$ ist irreduzibel.*

Beweis: Der Koeffizient von b^{48} im L-Gewichtszählerpolynom $P^S_{V^\natural}(a,b,c)$ ist nach Satz 4.1.5 gerade 1, d.h. $L(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2})$ ist mit einfacher Vielfachheit in $K_{(1)}$ enthalten. Sei t ein $L := L_{1/2}^{\otimes 48}(0)$-Höchstgewichtsvektor für $L(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2})$.

Wir zeigen als erstes: In jedem nichttrivialen $K_{(0)}$-Untermodul N von $K_{(1)} = \bigoplus c_{h_1,\ldots,h_{47},1/2} L_{1/2}(h_1,\ldots,h_{47},\frac{1}{2})$ ist für $c_{h_1,\ldots,h_{47},1/2} > 0$ ein L-Modul $L(h_1,\ldots,h_{47},\frac{1}{2})$ in der isotypischen $(h_1,\ldots,h_{47},\frac{1}{2})$-Komponente von N enthalten.

Für $0 \neq v \in L(h_1,\ldots,h_{48}) \subset V^\natural$ ist nach [DL93], Prop. 11.9 $Y(t,z)v \neq 0$. Setzen wir

$$h_i' := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } h_i = 0, \\ 0 & \text{für } h_i = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{16} & \text{für } h_i = \frac{1}{16}, \end{cases}$$

so erhalten wir wegen der Fusionsregeln (2.10) einen Untermodul $L(h_1',\ldots,h_{48}')$ in $V^\natural$, Zu Elementen $0 \neq m \in L(h_1,\ldots,h_{47},\frac{1}{2}) \subset K_{(1)}$ und $0 \neq n \in L(f_1,\ldots,f_{47},\frac{1}{2}) \subset K_{(1)}$ gibt es also Elemente $0 \neq m' \in L(h_1',\ldots,h_{47}',0) \subset K_{(0)}$ und $0 \neq n' \in L(f_1',\ldots,f_{47}',0) \subset K_{(0)}$. Da $K_{(0)}$ irreduzibel ist, gibt es nach [DM94b], Korollar 4.2, ein Element $w \in K_{(0)}$ mit $w_k m' = n'$ für ein k. Wiederum aufgrund der Fusionsregeln (!) ist dann $0 \neq Y(w,z)m \in L(f_1,\ldots,f_{47},\frac{1}{2})[[z,z^{-1}]]$, d.h. wir erhalten ein Element $\overline{n} \neq 0$ in einem L-Modul $L(f_1,\ldots f_{47},\frac{1}{2}) \subset K_{(1)}$.

Zu zeigen bleibt noch: Ist ein Modul $L(h_1,\ldots,h_{47},\frac{1}{2})$ in einem $K_{(0)}$-Untermodul N enthalten, so auch die ganze zugehörige isotypische $(h_1,\ldots,h_{47},\frac{1}{2})$-Komponente.
Sei X bzw. X' der Vektorraum der Virasorohöchstgewichtsvektoren vom Typ $(h_1,\ldots,h_{47},\frac{1}{2})$ bzw. vom Typ $(h_1',\ldots,h_{47}',0)$. Sei weiter $W \subset K_{(0)}$ der L-Untermodul, dessen Vertexoperatoren die Moduln vom Typ $(h_1,\ldots,h_{47},\frac{1}{2})$ oder — äquivalent dazu — vom Typ $(h_1',\ldots,h_{47}',0)$ in sich abbilden. Bezeichne mit A die von den Endomorphismen $w_{\deg w-1}$ zu Virasorohöchstgewichtsvektoren $w \in W$ erzeugte Unteralgebra von $\mathrm{End}(V^\natural)$. Das Korollar 4.2 aus [DM94b] und Lemma 4.5 aus [DLM95b] zeigen zusammen mit der Irreduzibilität von $K_{(0)}$: X' ist ein irreduzibler A-Modul.

Aber auch der A-Modul X ist irreduzibel: Die durch das oben definierte Element t gegebene Abbildung $t_{\deg t-1} : X' \longrightarrow X$ ist ein A-Modulhomomorphismus, da aus der Assoziativität des Tensorproduktes folgt, daß $t_{\deg t-1}t_{\deg t-1}$ ein nichtverschwindender Skalar ist. $\square$

Ein anderer Beweis ergibt sich mit der in [DM94b] entwickelten Theorie:[4] Die VOA $K_{(0)} \oplus K_{(1)}$ ist als Fixpunktmenge der $2A$-Involution α einfach (s. Satz 4.2.4). Betrachte auf $K_{(0)} \oplus K_{(1)}$ den Automorphismus σ, der mit 1 auf $K_{(0)}$ und mit -1 auf $K_{(1)}$ operiert. Es folgt dann aus Satz 3 in [DM94b], daß $K_{(0)}$ eine einfache VOA und $K_{(1)}$ ein irreduzibler $K_{(0)}$-Modul ist.

Vermutlich ist $K_{(2)}$ ebenfalls ein irreduzibler $K_{(0)}$-Modul.

In der Zerlegung (4.5) läßt sich $L_{1/2}(n_l)$ abspalten: Setzt man

$$VB^\natural_{(l)} = \bigoplus_{h_1,\ldots,h_{47}} c_{h_1,\ldots,h_{47},n_l} L_{1/2}(h_1,\ldots,h_{47}), \tag{4.7}$$

so gilt $K_{(l)} = VB^\natural_{(l)} \otimes L_{1/2}(n_l)$. Wir sind nun genau in der in Abschnitt 3.1 beschriebenen Situation, wobei hier $U = L_{1/2}^{\otimes 47}(0)$ und $L = L_{1/2}^{(48)}(0)$ ist.

Gleichung (3.2) aus Kapitel 3 ist die Zerlegung

$$V^\natural = \bigoplus_{l=0,1,2} VB^\natural_{(l)} \otimes L(n_l)$$

des Mondscheinmoduls.

Da $K_{(l)} = VB^\natural_{(l)} \otimes L_{1/2}(n_l)$ für $l = 0$ oder 1 irreduzibel ist, gilt dies auch für die $VB^\natural_{(0)}$-Moduln $VB^\natural_{(0)}$ und $VB^\natural_{(1)}$ (s. [FHL93], Prop. 4.7.2).

Nach Satz 3.1.3 wird durch (3.4) auf $VB^\natural := VB^\natural_{(0)} \oplus VB^\natural_{(1)}$ die Struktur einer SVOA vom Rang $23\frac{1}{2}$ definiert. Wir werden zeigen, daß das Babymonster B — die zweitgrößte sporadische einfache endliche Gruppe, die von B. Fischer gefunden und in [LcS77] konstruiert worden ist — eine Untergruppe der Automorphismengruppe von $VB^\natural$ ist, und bezeichnen daher $VB^\natural$ als den *kürzeren Mondscheinmodul* oder als die **Babymonster-SVOA**.

Wie in Kapitel 3 gezeigt (Lemma 3.1.2), hängt die SVOA-Struktur nicht von der gewählten rationalen Unter-VOA $L \cong L_{1/2}^{\otimes 48}(0)$ ab.

Wir formulieren Vermutung 3.1.4 für die SVOA $VB^\natural$ nochmal für sich alleine:

Vermutung 4.2.3 *Die Babymonster-SVOA $VB^\natural$ ist selbstdual „sehr schön“ unitär und rational.*

[4] Nach einem Hinweis von C. Dong und G. Mason.

Einige der unter der Definition „sehr schön“ zusammengefaßten Eigenschaften werden wir im folgenden auch beweisen.

Bevor wir die Operation von B betrachten, sei an die Definition der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(V)$ einer $(S)VOA$ $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ erinnert. Ein Automorphismus von V ist eine invertierbare lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$, so daß $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, $f(\omega) = \omega$ und

$$f\,Y(v, z) = Y(f(v), z)f$$

für alle $v \in V$ gilt.

Ist (M, Y_M) ein V-Modul, so induziert ein Automorphismus f auf dem unterliegenden linearen Raum M eine neue mit $(M, Y_M^{(f)})$ bezeichnete V-Modulstruktur, die durch

$$Y_M^{(f)}(v, z) = Y_M(f(v), z)$$

für alle $v \in V$ gegeben wird.

Der Automorphismus f heißt *innerer Automorphismus*, falls für jeden irreduziblen V-Modul (M, Y_M) der V-Modul $(M, Y_M^{(f)})$ zu (M, Y_M) isomorph ist. Die Untergruppe $\mathrm{Inn}(V)$ der inneren Automorphismen von V ist ein Normalteiler von $\mathrm{Aut}(V)$; die Faktorgruppe operiert als Permutationsgruppe auf der Menge der irreduziblen Moduln. Es ist zu vermuten, daß $\mathrm{Aut}(V)/\mathrm{Inn}(V)$ eine Untergruppe (oder sogar gleich) der Automorphismengruppe der abstrakten Fusionsalgebra $\mathcal{F}(V)$ ist.

Auf jedem irreduziblen V-Modul existiert eine projektive Darstellung von $\mathrm{Inn}(V)$ (siehe [DM94a], Abschnitt 2).

Wir untersuchen nun, welche Untergruppe des Monsters M auf den Moduln $K_{(l)}$ bzw. $VB^\natural_{(l)}$ operiert. Der Zentralisator einer $2A$-Involution ist $\mathrm{Cent}_M(\alpha) \cong 2.B$, die maximale (nichtsplittende) zentrale Erweiterung des Babymonsters B. Die Zerlegung von $V_2^\natural$ unter $2.B$ in irreduzible invariante Unterräume zeigt die folgende Übersicht (vgl. [Con84] und [MN93]):

$2.B$ Darstellung:	$\underline{1}$	$\oplus$	$\underline{1}$	$\oplus$	$\underline{96255}$	$\oplus$	$\underline{4371}$	$\oplus$	$\underline{96256}$	
Eigenwerte von $(\omega_{48})_1$:	2		0		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{16}$	(4.8)
Eigenwerte von α:	$+1$		$+1$		$+1$		$+1$		-1	

Hierbei ist $\omega_{48} = 2 \cdot i_\alpha$ das Virasoroelement zum Idempotent i_α. Die ersten beiden Komponenten der Zerlegung sind die von den Virasoroelementen ω_{48} von $L_{1/2}^{(48)}(0)$ und $\omega - \omega_{48}$ von $VB^\natural_{(0)}$ aufgespannten Vektorräume, d.h. $2.B$ fixiert die Virasoroelemente von $L_{1/2}^{(48)}(0)$ und $VB^\natural_{(0)}$. Daher sind auch die Unteralgebren $L_{1/2}^{(48)}(0)$ und $VB^\natural_{(0)}$ $= \mathrm{Com}_{V^\natural}(L_{1/2}^{(48)}(0)) = \{v \in V^\natural \mid (\omega_{48})_0 v = 0\}$ invariant unter $2.B$ (vgl. Lemma 3.1.1). Auch die Zerlegung (4.6) wird von $2.B$ respektiert, da die Zerlegung durch die Eigenwerte 0, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{16}$ $\pmod{\mathbf{Z}}$ von $(\omega_{48})_1$ gegeben ist.

Satz 4.2.4 *Auf $K_{(0)}$ und $K_{(1)}$ operiert das zentrale Element $\alpha \in 2.B$ mit $+1$, auf $K_{(2)}$ mit -1.*

Beweis: Der Mondscheinmodul $V^\natural$ ist ein irreduzibler Modul der affinen Griess Algebra $\hat{\mathcal{B}}$, d.h. er wird erzeugt von den Koeffizienten der Vertexoperatoren von Elementen aus $V_2^\natural$ (s. [FLM88], Satz 12.3.1. (g)) Ein Element $v \in V^\natural$ ist also Linearkombination von Elementen

$$w = (x_1)_{n_1}(x_2)_{n_2}\dots(x_k)_{n_k}\mathbf{1} \qquad \text{mit } x_i \in (K_{(l)})_2.$$

Wegen der Fusionsregeln von $L_{1/2}(0)$ gilt:

$$w \in \begin{cases} K_{(0)},\ K_{(1)} & \text{falls eine gerade Anzahl der } x_i \in (K_{(2)})_2, \\ K_{(2)} & \text{falls eine ungerade Anzahl der } x_i \in (K_{(2)})_2. \end{cases} \tag{4.9}$$

Für die Involution $\alpha \in 2.B \subset \mathrm{Aut}(V^\natural)$ erhält man:

$$\begin{aligned} \alpha\, w &= (\alpha x_1)_{n_1}(\alpha x_2)_{n_2}\dots(\alpha x_k)_{n_k}(\alpha\mathbf{1}) \\ &= (-1)^{\#\{i|x_i\in(K_{(2)})_2\}}w, \end{aligned} \tag{4.10}$$

denn nach (4.8) gilt

$$\alpha\, x = \begin{cases} +x & \text{falls } x \in (K_{(0)})_2,\ (K_{(1)})_2, \\ -x & \text{falls } x \in (K_{(2)})_2. \end{cases}$$

Die beiden Gleichungen (4.9) und (4.10) ergeben die Behauptung. □

Wir erhalten somit eine B-Operation auf $K_{(0)} \oplus K_{(1)}$ und, da B auf dem Virasoroelement von $L_{1/2}^{(48)}(0)$ trivial operiert, eine Operation auf den Faktoren des Tensorproduktes:

Lemma 4.2.5 *Das Babymonster B operiert durch Automorphismen auf den beiden $VB^\natural_{(0)}$-Moduln $VB^\natural_{(0)}$ und $VB^\natural_{(1)}$.*

Beweis: Da die $K_{(0)}$-Moduln $K_{(l)}$ ($l = 0$ oder 1) irreduzibel sind, können wir die „abstrakten" $VB^\natural_{(0)}$-Moduln $VB^\natural_{(l)}$ als „$VB^\natural_{(0)}$-Untermoduln" von $K_{(l)}$ auffassen (s. [FHL93], Beweis von Satz 4.7.4): Sei $w = x \otimes y$ ein zerlegbarer von Null verschiedener Tensor in $(K_{(l)})_{\min}$, der kleinsten nichttrivialen Komponente von $K_{(l)}$. Dann ist $VB^\natural_{(l)}$ der „$VB^\natural_{(0)}$-Untermodul", der von den Elementen der Form $(v \otimes \mathbf{1})_n(x \otimes y)$ erzeugt wird, wobei $v \in VB^\natural_{(0)}$ als homogen vorausgesetzt werden kann. Hierbei haben wir noch Proposition 4.1 aus [DM94b] benutzt. Die $VB^\natural_{(0)}$-Modulstruktur ist offensichtlich.

Die B-Operation auf $VB^\natural_{(0)} = \mathrm{Span}((v \otimes \mathbf{1})_n(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})) = \mathrm{Span}(v_n\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \subset K_{(0)}$ ist gerade die Einschränkung der B-Operation von $K_{(0)}$ auf $VB^\natural_{(0)} = \mathrm{Com}(L_{1/2}^{(48)}(0))$.

Die B-Operation auf $K_{(1)}$ bildet für $g \in B$ ein Element $(v \otimes \mathbf{1})_n(x \otimes y)$ auf das Element $g((v \otimes \mathbf{1})_n(x \otimes y)) = (g(v) \otimes \mathbf{1})_n(g(x \otimes y))$ ab. Nun kann wegen $\dim (K_{(1)})_2 = \dim (VB^\natural_{(1)})_{3/2} \cdot \dim (L_{1/2}^{(48)}(\frac{1}{2}))_{1/2}$ und $\dim (L_{1/2}^{(48)}(\frac{1}{2}))_{1/2} = 1$ die Komponente $(K_{(1)})_2$ mit

$(VB^\natural_{(1)})_{3/2}$ identifiziert werden, d.h. $g(x \otimes y) =: g(x) \otimes y$ liegt wieder in $VB^\natural_{(1)}$. Somit ist $VB^\natural_{(1)}$ ein B-invarianter „$VB^\natural_{(0)}$-Untermodul“, wir haben also eine mit der $VB^\natural_{(0)}$-Modulstruktur verträgliche B-Operation auf $VB^\natural_{(1)}$. □

Fassen wir $L_{1/2}(n_l)$ als trivialen B-Modul auf, dann ist für $l = 0$ oder 1 die B-Operation auf $VB^\natural_{(l)}$ gerade so konstruiert, daß $K_{(l)} \cong VB^\natural_{(l)} \otimes L_{1/2}(n_l)$ ein Isomorphismus von B-Moduln ist.

Satz 4.2.6 *Auf der Babymonster-SVOA $VB^\natural = VB^\natural_{(0)} \oplus VB^\natural_{(1)}$ operiert das Babymonster nichttrivial durch Automorphismen.*

Beweis: Die Effektivität der B-Operation folgt aus der Zerlegung (4.8). Zu zeigen ist, daß die Operation mit der vollen SVOA-Struktur, wie sie in (3.4) definiert wurde, verträglich ist. Dazu betrachten wir wie beim Beweis von Lemma 3.1.2 oder Satz 3.1.3 die Korrellationsfunktionen.

Seien u, v Elemente in $VB^\natural_{(0)}$ oder $VB^\natural_{(1)}$ bzw. w' ein Element in dem eingeschränkten Dualraum ${VB^\natural_{(0)}}'$ oder ${VB^\natural_{(1)}}'$, sei $g \in B$. Auf ${VB^\natural_{(l)}}'$ operiert g vermöge $\langle g(w'), v\rangle = \langle w', g^{-1}(v)\rangle$. Die Invarianz des Vertexoperators ${}^{VB^\natural}Y : VB^\natural \longrightarrow \mathrm{End}(VB^\natural)[[z, z^{-1}]]$ ist daher äquivalent zu der Gleichheit

$$\langle g(w'), {}^{VB^\natural}Y(g(u), z)g(v)\rangle = \langle w', {}^{VB^\natural}Y(u, z)v\rangle \tag{4.11}$$

von rationalen Funktionen in z. Wie beim Beweis von Lemma 3.1.2 können wir $| w' | \equiv | u | + | v | \pmod 2$ voraussetzen und dann zu u, v und w' Elemente $\overline{u}$, $\overline{v} \in L_{1/2}(n_l)$ bzw. $\overline{w}' \in L'_{1/2}(n_l)$ mit $| u |=| \overline{u} |$, $| v |=| \overline{v} |$ und $| w' |=| \overline{w}' |$ sowie

$$\langle \overline{w}', {}^{L_{1/2}}Y(\overline{u}, z)\overline{v}\rangle \neq 0 \tag{4.12}$$

finden. Man erhält

$$\begin{aligned}
& \langle w', {}^{VB^\natural}Y(u, z)v\rangle \cdot \langle \overline{w}', {}^{L_{1/2}}Y(\overline{u}, z)\overline{v}\rangle \\
= \; & \langle w' \otimes \overline{w}', ({}^{VB^\natural}Y(u, z) \otimes {}^{L_{1/2}}Y(\overline{u}, z))v \otimes \overline{v}\rangle \\
= \; & \langle w' \otimes \overline{w}', {}^{V^\natural}Y(u \otimes \overline{u}, z)v \otimes \overline{v}\rangle
\end{aligned}$$

wegen der Invarianz von ${}^{V^\natural}Y$ unter $2.B \subset M$

$$= \; \langle g(w' \otimes \overline{w}'), {}^{V^\natural}Y(g(u \otimes \overline{u}), z)g(v \otimes \overline{v})\rangle$$

nach Definition der B-Operation auf $VB^\natural_{(l)} \otimes L_{1/2}(n_l)$

$$\begin{aligned}
= \; & \langle g(w') \otimes \overline{w}', {}^{V^\natural}Y(g(u) \otimes \overline{u}, z)g(v) \otimes \overline{v}\rangle \\
= \; & \langle g(w'), {}^{VB^\natural}Y(g(u), z)g(v)\rangle \cdot \langle \overline{w}', {}^{L_{1/2}}Y(\overline{u}, z)\overline{v}\rangle.
\end{aligned}$$

Hieraus und aus (4.12) folgt (4.11). □

Der Beweis läßt sich auf alle der in Kapitel 3 aus einem Paar (V, L) konstruierten SVOAs W übertragen, falls die Gruppenoperation auf W geeignet definiert wird.

J. Tits hatte in [Tit84] u.a. gezeigt, daß das Monster die volle Automorphismengruppe der Griessalgebra $\mathcal{B}$ ist. Dazu wird zuerst gezeigt, daß die Automorphismengruppe endlich ist, und dann wird eine gruppentheoretische Charakterisierung des Monsters durch S. Smith verwendet. Da nach [FLM88] das Monster auf $V^\natural$ operiert, muß es wegen der Irreduzibilität von $V^\natural$ als $\hat{\mathcal{B}}$-Modul die volle Automorphismengruppe von $V^\natural$ sein.

Für $VB^\natural$ könnte man ähnlich vorgehen, und versuchen die Arbeit [Bie79] zu verwenden, in der das Babymonster dadurch charakterisiert wird, daß der Zentralisator einer Involution eine Erweiterung der Conwaygruppe Co_2 durch eine extraspezielle 2-Gruppe ist.

Satz 4.2.7 *Die Automorphismengruppe von $VB_2^\natural$ der 96256-dimensionalen Unteralgebra der Griess Algebra ist eine endliche Gruppe $G > B$. Für die Automorphismengruppe von SVOA $VB^\natural$ gilt $2 \times B < \mathrm{Aut}(VB^\natural) < 2 \times G$, wobei der Faktor 2 dem in Seite 39 betrachteten Automorphismus κ entspricht, der auf $VB^\natural_{(1)}$ mit -1 operiert.*

Beweis: (Skizze)
(1) $G := \mathrm{Aut}(VB_2^\natural)$ ist endlich: Die in $VB_2^\natural$ gelegenen Transpositions-Idempotenten erzeugen $VB_2^\natural$ als Vektorraum, da B transitiv auf ihnen operiert. Wäre G unendlich, so gäbe es auf der 96255-dimensionalen Sphäre ein Transpositions-Idempotent i mit sehr nahem G-Bild i':

$$i' = i + \epsilon\, u + \mathrm{O}(\epsilon^2),$$

wobei u orthogonal zu i und ϵ sehr klein. Wir erhalten

$$i'_1 i' = i_1 i + 2\epsilon\, i_1 u + \mathrm{O}(\epsilon^2).$$

Nach (4.8) gilt aber $||i_1 u|| \leq \frac{1}{4}||u||$, im Widerspruch zur Gleichung $i'_1 i' = i'$.

(2) $B \subset \mathrm{Aut}(VB^\natural_{(0)}) \subset G$: Hierzu ist zu zeigen, daß $VB^\natural_{(0)}$ ein irreduzibler Modul über der affinen Algebra $\hat{VB_2^\natural}$ ist. Dazu verwende man die Zerlegung als $L_{1/2}^{\otimes 47}(0)$-Modul und die Zerlegung als B-Modul, wie in Lemma 4.2.10 beschrieben.

(3) Sei $\alpha \in \mathrm{Aut}(VB^\natural)$, $\alpha = \alpha_0 \oplus \alpha_1$. Dann ist auch $\overline{\alpha} = \alpha_0 \oplus -\alpha_1 \in \mathrm{Aut}(VB^\natural)$. Umgekehrt ist α_1 durch α_0 bis auf das Vorzeichen festgelegt: Sei $\alpha' = \alpha_0 \oplus \alpha'_1$; dann gilt $\alpha'\alpha^{-1} = \mathrm{id} \oplus \alpha'_1\alpha_1^{-1}$, d.h. $\alpha'_1\alpha_1^{-1}$ ist ein $VB^\natural_{(1)}$-Modulhomomorphismus. Wegen der Irreduzibilität von $VB^\natural_{(1)}$ ist er ein Skalar s und somit $s = \pm 1$. (Sei $\alpha = \mathrm{id} \oplus s \cdot \mathrm{id}$, für $x \in VB^\natural_{(1)}$ gilt $s^2 \cdot x_n x = (sx)_n(sx) = x_n x$, also $s = \pm 1$.) $\square$

Vermutlich gilt die Gleichheit $G = B$. Ein anderer Beweis für $\mathrm{Aut}(VB^\natural) = 2 \times B$ mit Hilfe von VOA-Theorie ergäbe sich aus Vermutung 4.2.3 und der zu vermutenden (projektiven) Erweiterbarkeit von Automorphismen einer „schönen“ rationalen VOA zur vollen „Intertwineralgebra“ (d.h. den Intertwineroperatoren zwischen den irreduziblen Moduln; siehe auch S. 60): Jeder Automorphismus von $VB^\natural_{(0)}$ lieferte einen Automorphismus von $V^\natural = VB^\natural_{(0)} \otimes L_{1/2}(0) \oplus VB^\natural_{(1)} \otimes L_{1/2}(\frac{1}{2}) \oplus VB^\natural_{(2)} \otimes L_{1/2}(\frac{1}{16})$ der $L_{1/2}(0)$ fixiert, d.h. er müßte wegen $\mathrm{Aut}(V^\natural) = M$ in $2.B$ liegen.

Satz 4.2.8 (Charakter von $VB^\natural$) *Für den Charakter der Babymonster-SVOA $VB^\natural$ gilt*

$$\chi_{VB^\natural} = \chi_{1/2}^{47} - 47 \cdot \chi_{1/2}^{23} = q^{-\frac{47}{48}}(1 + 4371\, q^{\frac{3}{2}} + 96256\, q^2 + 1143745\, q^{5/2} + 9646891\, q^3 + \cdots).$$

Im einzelnen erhält man für die Charaktere der $VB^\natural_{(0)}$-Moduln:

$$\begin{aligned} \chi_{VB^\natural_{(0)}} &= q^{-\frac{47}{48}}\,(1 + 96256\, q^2 + 9646891\, q^3 + 366845011\, q^4 + 8223700027\, q^5 + \cdots), \\ \chi_{VB^\natural_{(1)}} &= q^{-\frac{47}{48}}\,(4371\, q^{\frac{3}{2}} + 1143745\, q^{\frac{5}{2}} + 64680601\, q^{\frac{7}{2}} + 1829005611\, q^{\frac{9}{2}} + \cdots), \qquad (4.13) \\ \chi_{VB^\natural_{(2)}} &= q^{-\frac{47}{48}}\,(96256\, q^{\frac{31}{16}} + 10602496\, q^{\frac{47}{16}} + 420831232\, q^{\frac{63}{16}} + 9685952512\, q^{\frac{79}{16}} + \cdots). \end{aligned}$$

Wenn wir Vermutung 4.2.3 schon bewiesen hätten, ergäbe sich der Charakter von $VB^\natural$ wegen $VB^\natural_{1/2} = VB^\natural_1 = 0$ unmittelbar aus Satz 2.2.3. Stattdessen gehen wir direkter vor und verwenden Satz 4.1.5.

Beweis von Satz 4.2.8: Fixiert man ein Idempotent a_x, $x \in \{1, \ldots, 48\}$ aus dem in Satz 4.1.5 verwendeten System S von Transpositions-Idempotenten, so entspricht $S_x := S \setminus \{a_x\}$ einem System von 47 Idempotenten für die mittels des Idempotents a_x wie in (4.7) konstruierte Version von $VB^\natural$. Wir definieren analog zu (4.2) und (4.3) die $L_{1/2}(0)$-Gewichtszählerpolynome von $VB^\natural_{(0)}$, $VB^\natural_{(1)}$ und $VB^\natural_{(2)}$ bzgl. S_x durch

$$P^{S_x}_{VB^\natural_{(l)}} = \sum_{\substack{i,j,k \in \mathbf{Z}_+ \\ i+j+k=47}} m^{x,l}_{i,j,k}\, a^i b^j c^k,$$

wobei $m^{x,l}_{i,j,k}$ die Anzahl von $L_{1/2}^{\otimes 48}(0)$-Moduln in der Zerlegung (4.1) ist, für die $h_x = 0$ (falls $l = 0$), $h_x = \frac{1}{2}$ (falls $l = 1$), bzw. $h_x = \frac{1}{16}$ (falls $l = 2$) ist. Vermutlich hängen die Koeffizienten $m^{x,l}_{i,j,k}$ von der Position x ab, so daß wir sie nicht direkt ausrechnen können. Durch Einsetzen der Charaktere der $L_{1/2}(0)$-Moduln $a = \chi_{L_{1/2}(0)}$, $b = \chi_{L_{1/2}(\frac{1}{2})}$ und $c = \chi_{L_{1/2}(\frac{1}{16})}$ in $P^{S_x}_{VB^\natural_{(l)}}(a,b,c)$ erhält man die Charaktere $\chi_{VB^\natural_{(l)}}$. Diese sind sicher unabhängig von der Auswahl von a_x, da das Monster ja transitiv auf den Idempotenten zu $2A$-Involutionen operiert. Daher erhält man

$$\chi_{VB^\natural_{(l)}} = \frac{1}{48} \sum_{x \in \{1,\ldots,48\}} P^{S_x}_{VB^\natural_{(l)}}(\chi_{L_{1/2}(0)}, \chi_{L_{1/2}(\frac{1}{2})}, \chi_{L_{1/2}(\frac{1}{16})}). \qquad (4.14)$$

Die Koeffizienten $w_{i,j,k}$ von $\sum_{x \in \{1,\ldots,48\}} P^{S_x}_{VB^\natural_{(l)}}(a,b,c)$ ergeben sich aber aus denen von $P^S_{V^\natural}(a,b,c)$ durch doppeltes Abzählen:

$$w_{i,j,k} = \begin{cases} (i+1)\, m_{i+1,j,k}, & \text{falls } l = 0, \\ (j+1)\, m_{i,j+1,k}, & \text{falls } l = 1, \\ (k+1)\, m_{i,j,k+1}, & \text{falls } l = 2. \end{cases}$$

Die Gleichungen (4.13) folgen dann aus (4.14) durch Einsetzen und Feststellen der Übereinstimmung der ersten Koeffizienten der q-Entwicklung in $\mathbf{Z}[[q^{1/48}]]$, denn beide Seiten sind meromorphe Funktionen auf einer Fläche $\overline{\mathbf{H}/\Gamma}$ mit endlich vielen Polstellen beschränkter Ordnung. $\square$

Für den Mondscheinmodul $V^\natural$ wird in [FLM88] vermutet, daß er die einzige selbstduale rationale VOA V vom Rang 24 mit $V_1 = 0$ ist. In Analogie zu der Charakterisierung des kürzeren Golaycodes und des kürzeren Leechgitters sollte folgendes gelten:

Vermutung 4.2.9 *Die Babymonster-SVOA $VB^\natural$ ist bis auf Isomorphie die einzige selbstduale, unitäre, „sehr schöne" und rationale SVOA V vom Rang $23\frac{1}{2}$ mit $V_{1/2} = V_1 = 0$.*

Dieses Resultat würde aus der Eindeutigkeit des Mondscheinmoduls $V^\natural$ folgen, wenn gezeigt wird, daß die Transpositions-Idempotenten die einzigen Idempotenten der Griess Algebra mit Norm $\frac{1}{16}$ sind und Vermutung 3.2.2 gilt. Die Eindeutigkeit der Norm-$\frac{1}{16}$-Idempotenten sollte sich aus der Bemerkung in [Miy] ergeben, daß nämlich ein solches Idempotent aufgrund der Struktur der Fusionsalgebra von $L_{1/2}(0)$ stets eine nichttriviale Involution in $\mathrm{Aut}(V^\natural) = M$ liefert. Um umgekehrt die Eindeutigkeit des Mondscheinmoduls aus der Eindeutigkeit von $VB^\natural$ herzuleiten, müßte man zusätzlich zeigen, daß die Algebra V_2 einer extremalen VOA vom Rang 24 (d.h. einer VOA mit $V_1 = 0$, s. Kap. 5) stets Idempotente der Norm $\frac{1}{16}$ besitzt.

Die Zerlegung der homogenen Komponenten von $V^\natural$ in irreduzible M-Moduln (s. [CN79, Bor92a]) liefert durch Restriktion auch eine Zerlegung in irreduzible $2.B$-Moduln. Der Teil, auf dem das zentrale Element von $2.B$ mit -1 operiert, bestimmt den $K_{(2)}$-Anteil von $V^\natural$ und man erhält so die Zerlegung der Komponenten von $VB^\natural(2)$ in irreduzible $2.B$-Moduln. Für die Aufteilung der irreduziblen B-Moduln von $K_{(0)} \oplus K_{(1)}$ auf die Summanden $K_{(0)}$ bzw. $K_{(1)}$ benötigt man weitere Informationen, die sich z.B. aus den verallgemeinerten Nortonvermutungen [Nor87] und einer expliziten Beschreibung des $2A$-getwisteten Sektors $V^\natural(2A)$ ergeben würden (s. [DLM95b]). Für die ersten Komponenten von $VB^\natural$ erhält man die Aufteilung allerdings eindeutig aus dem in Satz 4.2.8 berechneten Charakter und der Zerlegung als Virasoromodul (vgl. [DLM]).

Lemma 4.2.10 *Die beiden nachfolgenden Tabellen beschreiben die Zerlegung der ersten Komponenten von $VB^\natural$ bzw. $VB^\natural_{(2)}$ in irreduzible B- bzw. $2B$-Moduln. Die Einträge geben die jeweilige Vielfachheit des Charakters an.*

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	χ_7	χ_8	χ_9	χ_{10}	χ_{11}	χ_{12}	χ_{13}	χ_{14}
$VB_0^\natural$	1													
$VB_1^\natural$	0													
$VB_2^\natural$	1	0	1											
$VB_3^\natural$	1	0	1	0	0	1								
$VB_4^\natural$	2	0	2	0	1	1	0	1						
$VB_5^\natural$	2	0	3	0	1	3	0	1	0	0	1	0	0	1
$VB_{1/2}^\natural$	0													
$VB_{3/2}^\natural$	0	1												
$VB_{5/2}^\natural$	0	1	0	1										
$VB_{7/2}^\natural$	0	2	0	1	0	0	1							
$VB_{9/2}^\natural$	0	3	0	2	0	0	1	0	1	1				

	χ_{185}	χ_{186}	χ_{187}	χ_{188}	χ_{189}	χ_{190}	χ_{191}	χ_{192}	χ_{193}	χ_{194}	χ_{195}	χ_{196}
$(VB_{(2)}^\natural)_0$	1											
$(VB_{(2)}^\natural)_1$	1	1										
$(VB_{(2)}^\natural)_2$	2	1	1									
$(VB_{(2)}^\natural)_3$	3	2	2	1								
$(VB_{(2)}^\natural)_4$	5	4	4	2	1	0	0	1				
$(VB_{(2)}^\natural)_5$	8	7	8	5	2	0	0	2	1	1		
$(VB_{(2)}^\natural)_6$	13	12	15	10	5	0	0	5	3	3	1	1

$\square$

In den nächsten nicht mehr in der Tabelle aufgeführten Komponenten von $VB_{(0)}^\natural$ und $VB_{(1)}^\natural$ finden sich erstmals gleiche B-Charaktere. Die Charaktere χ_{190} und χ_{191} können, da nicht reell, in $VB_{(2)}^\natural$ nicht vorkommen.

Chapter 5

Extremale selbstduale Vertexoperator-Superalgebren

Auch dieses Kapitel ist durch die Analogie zwischen Codes, Gittern und VOAs motiviert. Ausgehend von dem Problem möglichst dichte Kugelpackungen in den 2-fach homogenen Räumen $\mathbf{F}_2^n$ (Hammingschema, s. [Del73]) bzw. $\mathbf{R}^n$ (euklidischer Raum) zu konstruieren, betrachtet man in der Codierungstheorie lineare Codes mit möglichst großem Minimalgewicht bzw. Gitter mit großer Minimalnorm (vgl. [CS93], Kap. 9). Es zeigt sich, daß in der Klasse der selbstdualen (geraden) Codes bzw. Gitter, asymptotisch gute Packungen existieren, die den theoretischen Schranken sehr nahe kommen (vgl. [CS93], Kap. 7 u. [MH73], Kap. II, §9). Für kleine n ($n \lesssim 24$) sind diese Codes und Gitter häufig die eindeutig bestimmte optimale Lösung des Packungsproblemes und weisen interessante Symmetriegruppen auf.

Wir definieren das Minimalgewicht einer (S)VOA als das minimale konforme Gewicht eines vom Vakuum verschiedenen Virasorohöchstgewichtsvektors. Völlig analog zu der Definition von selbstdualen Codes und Gittern (vgl. [CS93], Kap. 7), lassen sich nun extremale selbstduale (S)VOAs definieren und ähnliche Aussagen beweisen; insbesondere wird eine Charakterisierung der extremalen selbstdualen SVOAs (Satz 5.3.2) gegeben.

Offen bleibt die Frage nach der Existenz eines den Kugelpackungsproblemen verwandten „geometrischen Extremalproblems“, für welches diese extremalen (S)VOAs die (eindeutigen ?) Lösungen darstellen. Gibt es eine „nichtmeromorphe“ verallgemeinerte VOA $\mathcal{U}_c$ vom Rang c, in die sich alle (S)VOAs gleichen Ranges einbetten lassen ? Sie wäre das Analogon zu $\mathbf{F}_2^n$ bzw. $\mathbf{R}^n$. Was ist das VOA-Analogon zu Blockplänen [BJL85] bzw. sphärischen Blockplänen [DGS77] ?

5.1 Das Minimalgewicht einer (S)VOA

Das Minimalgewicht eines linearen Codes ist das kleinste Hamminggewicht von allen Codewörtern außer dem Nullvektor. Die Minimalnorm eines Gitters ist die kleinste Quadratlänge von allen Gittervektoren außer dem Ursprung. Das richtige Analogon bei VOAs ist das kleinste konforme Gewicht eines Virasorohöchstgewichtsvektors außer dem Vakuum.

Eine (S)VOA V ist ein Modul über der von dem Virasoroelement erzeugten Virsoroalgebra.

Definition 5.1.1 *Das Minimalgewicht $\mu(V)$ einer SVOA V ist der kleinste L_0-Eigenwert eines Virasorohöchstgewichtsvektors aus V ungleich dem Vakuum $\mathbf{C}\cdot\mathbf{1}\subset V_0$. Falls außer dem Vakuum keine weiteren Virasorohöchstgewichtsvektoren existieren, sei $\mu(V)=\infty$ gesetzt.*

Anmerkung: Würde man sich in der Definition nicht auf Virasorohöchstgewichtsvektoren beschränken, sondern beliebige L_0-Eigenwerte zulassen, so wäre wegen $\omega\in V_2$ stets $\mu(V)\leq 2$.

Sei nun V als „schön“ vorausgesetzt. Nach Definition 1.1.3 existiert dann eine Zerlegung von V als direkte Summe von Höchstgewichtsdarstellungen ihrer Virasoroalgebra:

$$V=\bigoplus_i M_{c,h_i}.$$

Da dort weiter $\dim(V_n)=0$ für $n<0$ und $\dim(V_0)=1$ vorausgesetzt werden, ist das Minimalgewicht $\mu(V)$ für VOAs eine positive ganze Zahl bzw. eine positive halbganze Zahl bei SVOAs.

Für Ränge $c>1$ ist der vom Vakuum erzeugte Modul $M_c:=\mathcal{U}(\mathrm{Vir}^-)/\langle L_{-1}\mathbf{1}\rangle$ irreduzibel und hat den Charakter $\chi_{M_c}=q^{-c/24}\prod_{n=2}^\infty\frac{1}{1-q^n}$ (vgl. [Wan93]). Die Moduln $M_{c,h}$, $c>1$, $h>0$ besitzen den Charakter $\chi_{M_c}=q^{-c/24}\prod_{n=1}^\infty\frac{1}{1-q^n}$. Insgesamt schreibt sich der Charakter von V daher als

$$\chi_V=q^{-\frac{c}{24}}\left(\prod_{n=2}^\infty\frac{1}{1-q^n}+\prod_{n=1}^\infty\frac{1}{1-q^n}\left(\sum_{i\geq\mu(V)}P_i\cdot q^i\right)\right), \tag{5.1}$$

wobei P_i die Dimension des Vektorraumes der Virasorohöchstgewichte vom Gewicht (c,i) ist, d.h. bis zum Term $q^{-c/24+\mu(V)}$ stimmen die Charaktere von V und M_c überein: $\chi_V=\chi_{M_c}+q^{-c/24}\cdot O(q^{\mu(V)})$.

Im Gegensatz zu der Situation bei Codes und Gittern, wo man durch Umskalieren beliebig großes Minimalgewicht erhält, ist es bei VOAs für $c>1$ nicht so einfach, unitäre rationale

Beispiele mit großem Minimalgewicht zu finden. Die zu Virasorohöchstgewichtsdarstellungen assoziierten VOAs (s. 1.2.1) sind nur für $c = 1 - \frac{6}{n(n+1)}$, $n = 3, 4, \ldots$ rational. Die zu Höchstgewichtsdarstellungen von Kac-Moody Algebren assoziierten VOAs (s. 1.2.5) und die VOAs zu Gittern (s. 1.2.6) haben wegen $V_1 \neq 0$ das Minimalgewicht 1. Die $\mathbf{Z}_2$-Orbifolds von Gitter-VOAs haben höchstens das Minimalgewicht 2 (vgl. Gleichung (5.8)). Wenn, wie vermutet (vgl. [DVVV89]), Orbifoldkonstruktionen von rationalen VOAs wieder rational sind, so haben wir folgendes Beispiel mit $c = 24$ und $\mu(V) \geq 10$: Wir betrachten die Unter-VOA $(V^\natural)^M$ von $V^\natural$, die aus den unter der Operation des Monsters invarianten Vektoren des Mondscheinmoduls besteht. Die Zerlegung der „Head-Charaktere" in irreduzible M-Darstellungen (s. [CN79], [CCN+85], S. 321) zeigt, daß bis einschließlich $V_{10}^\natural$ nur Vektoren im Vakuummodul M_{24} invariant unter M sind, d.h. es gilt $\mu((V^\natural)^M) \geq 10$. Tatsächlich ist $\mu((V^\natural)^M) = 12$, wie man z.B. aus der Tabelle in [HL94a] ablesen kann.

Wenn die Menge aller „schönen" unitären rationalen VOAs ähnliche Eigenschaften wie die der Codes und Gitter hat, ist folgendes zu erwarten: Für festen Rang c gibt es VOAs mit beliebig großem Minimalgewicht, die zugehörige Fusionsalgebra wird dann aber auch beliebig „groß". Genauer sollte für *selbstduale* VOAs die folgende Situation vorliegen: Bezeichne mit

$$\mu_c := \sup_V \mu(V)$$

— wobei V alle selbstdualen VOAs vom Rang c durchläuft — das größte Minimalgewicht einer selbstdualen VOAs vom Rang c. Zu erwarten ist, daß positive Konstanten C_1 und C_2 existieren, so daß

$$C_1 \leq \liminf_{c \longrightarrow \infty} \frac{\mu_c}{c} \leq \limsup_{c \longrightarrow \infty} \frac{\mu_c}{c} \leq C_2.$$

Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, daß zumindest die obere Abschätzung mit $C_2 = \frac{1}{24}$ erfüllt ist.

5.2 Extremale selbstduale VOAs

Codes und Gitter mit großem Minimalgewicht finden sich unter den selbstdualen Codes bzw. Gittern (siehe [CS93], Kap. 7.3–7.7). Insbesondere die extremalen geraden (oder Typ II) selbstdualen Codes und Gitter besitzen interessante Eigenschaften. In diesem Abschnitt betrachten wir das Analogon für selbstduale VOAs.

Sei in diesem Abschnitt V eine „schöne" rationale selbstduale VOA vom Rang c. Nach Satz 2.1.2 ist c ein ganzzahliges Vielfaches von 8, und der Charakter von V ist ein Polynom in $\chi_8 = \sqrt[3]{j} = q^{-1/3}(1 + 248\,q + 4124\,q^2 + \cdots)$:

$$\chi_V = \sum_{r=0}^{k} a_r \cdot \chi_8^{c/8-3r}; \quad k = \left[\frac{c}{24}\right], \tag{5.2}$$

mit eindeutig bestimmten ganzen Zahlen $a_0, \ldots, a_k$.

Definition 5.2.1 *Sind die a_r so gewählt, daß*

$$\chi_V = \chi_{M_c} \cdot (1 + A_{k+1}q^{k+1} + A_{k+2}q^{k+2} + \cdots), \tag{5.3}$$

so heißt (5.3) der extremale Charakter in Rang c und eine selbstduale VOA mit diesem Charakter eine extremale selbstduale VOA.

Der Charakter einer extremalen VOA ist insbesondere eindeutig bestimmt. Wegen Gleichung (5.1) gilt für das Minimalgewicht einer extremalen VOA $\mu(V) \geq [\frac{c}{24}] + 1$.

Ähnlich wie in [MOS75] beweist man den

Satz 5.2.2 *In dem extremalen Charakter (5.3) sind für alle Ränge c der Koeffizient A_{k+1} und die Differenz $A_{k+2} - A_{k+1}$ positiv.*

Mit (5.1) erhalten wir aus (5.3) für die Dimension P_i des Raumes der Virasorohöchstgewichtsvektoren vom Gewicht i: $P_0 = 1$, $P_1 = \ldots = P_k = 0$, $P_{k+1} = A_{k+1}$, $P_{k+2} = A_{k+2} - A_{k+1}$.

Wegen $P_{k+1} = A_{k+1} \neq 0$ folgt unmittelbar das

Korollar 5.2.3 *Das Minimalgewicht einer selbstdualen VOA V erfüllt*

$$\mu(V) \leq \left[\frac{c}{24}\right] + 1. \tag{5.4}$$

Anders als im Fall von Codes und Gittern könen wir aus Satz 5.2.2 *nicht* schließen, daß für große c keine extremalen selbstdualen VOAs existieren, denn $P_{k+2} = A_{k+2} - A_{k+1}$ wird für große c nicht negativ.

Beweis von Satz 5.2.2: Wir entwickeln $\chi_{M_c} \cdot \chi_8^{-c/8}$ in Potenzen von $\phi := \chi_8^{-3} = j^{-1} = q - 744\, q^2 + O(q^3)$:

$$\chi_{M_c} \cdot \chi_8^{-c/8} = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r \cdot \phi^r. \tag{5.5}$$

Hierbei gilt für den Koeffizienten α_r nach dem Bürmanschen Satz [WW69] die Formel

$$\alpha_r = \frac{1}{r!} \frac{d^{r-1}}{dq^{r-1}} \left\{ \frac{d(\chi_{M_c} \cdot \chi_8^{-c/8})}{dq} \left(\frac{q}{\phi}\right)^r \right\}_{q=0}. \tag{5.6}$$

Unter Verwendung von (5.2), (5.3) und (5.5) erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{k} a_r \phi^r &= \chi_V \cdot \chi_8^{-c/8} = \chi_V \cdot \chi_{M_c}^{-1} \cdot \chi_{M_c} \cdot \chi_8^{-c/8} \\ &= \left(1 + \sum_{n=k+1}^{\infty} A_n q^n\right) \left(\sum_{r=0}^{k} \alpha_r \phi^r + \sum_{r=k+1}^{\infty} \alpha_r \phi^r\right). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Koeffizientenvergleich liefert $a_r = \alpha_r$ für $0 \leq r \leq k$, und aus den Koeffizienten von q^{k+1}

und q^{k+2} ergibt sich

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= -\alpha_{k+1}, \\ A_{k+2} &= -\alpha_{k+2} + 744(k+1)\alpha_{k+1} - \alpha_1 \cdot A_{k+1}. \end{aligned}$$

Für $r=1$ liefert Gleichung (5.6) $\alpha_1 = -248 \cdot \frac{c}{8}$. Somit ist

$$A_{k+2} = -\alpha_{k+2} + 744(1 + \left[\frac{c}{24}\right] - \frac{c}{24})\alpha_{k+1}.$$

Gleichung (5.6) für die α_r läßt sich unter Verwendung der Abkürzung $\frac{d}{dq} = {}'$ weiter umformen zu

$$\alpha_r = \frac{1}{r!}\frac{d^{r-1}}{dq^{r-1}} \left\{ q^r \left[\chi'_{M_c} \cdot \chi_8 - \frac{c}{8} \cdot \chi_{M_c} \cdot \chi'_8 \right] \cdot \chi_8^{3r-c/8-1} \right\}_{q=0}.$$

Für $r \geq k+1$ ist $3r - c/8 - 1 \geq 3([\frac{c}{24}]+1) - c/8 - 1 \geq 0$, und daher sind die Koeffizienten von $\chi_8^{3r-c/8-1}$ alle positiv. Da χ_8 der Charakter der VOA V_{E_8} ist, folgt aus (5.1), daß $\frac{\chi_8}{\chi_{M_c}} = q^{(c-8)/24}\left(1 + \frac{1}{1-q}\left(\sum_{i\geq 1} P_i\, q^i\right)\right)$ positive Koeffizienten hat. Dann hat aber auch $\chi_{M_c}^2 \left(\frac{\chi_8}{\chi_{M_c}}\right)' = \chi_{M_c}\chi'_8 - \chi'_{M_c}\chi_8$ positive Koeffizienten und $\chi'_{M_c}\chi_8 - \frac{c}{8}\chi_{M_c}\chi'_8$ hat für $c \geq 8$ negative Koeffizienten. Insgesamt ist somit $A_{k+1} = -\alpha_{k+1}$ stets positiv.

Mit der Rademacherschen Kreismethode [Rad73] kann man nun das Wachstum der Koeffizienten u_n und v_n der Reihen $q^{c/24}\chi_{M_c}$ und χ_8 abschätzen (vgl. [Apo76]): Es gilt $u_n = e^{\pi\sqrt{(2/3)n} + \mathrm{O}(\log n)}$ und $v_n = e^{\pi\sqrt{(16/3)n} + \mathrm{O}(\log n)}$. Somit verhält sich der n-te Koeffizient von $q^r\left(\chi_{M_c}\chi'_8 - \frac{c}{8}\chi'_{M_c}\chi_8\right)\chi_8^{3r-c/8-1}$ wie $-e^{\pi\sqrt{((2/3)+(16/3)l)n} + \mathrm{O}(\log n)}$ mit $l = 3r - \frac{c}{8}$. Setzen wir $x = 3\left(\left(\frac{c}{24}\right) - \left[\frac{c}{24}\right]\right)$, so strebt daher in Abhängigkeit der Restklasse $c \pmod{24}$ der Quotient $\alpha_{k+2}/\alpha_{k+1} = e^{\pi(\sqrt{((2/3)+(16/3)(6-x))} - \sqrt{((2/3)+(16/3)(3-x))})\sqrt{k} + \mathrm{O}(\log k)}$ gegen unendlich. Insbesondere bleibt $A_{k+2} - A_{k+1} = -\alpha_{k+2} + (744(1 + [c/24] - c/24) + 1)\alpha_{k+1}$ stets positiv.

$\square$

Beispiele von extremalen selbstdualen VOAs:

Für $c = 8$ ist V_{E_8} extremal, für $c = 16$ sind $V_{E_8}^{\otimes 2}$ und $V_{D_{16}^+}$ extremal und für $c = 24$ ist die Monster-VOA $V^\natural$ extremal. Es wird vermutet, daß dies für diese Werte von c die einzigen extremalen VOAs sind, zumindest dann, wenn man zusätzlich unitär voraussetzt. Vergleiche hierzu die Diskussion in Kapitel 2 bei Vermutung 2.1.4. Für $c = 24$ ist dies die Eindeutigkeitsvermutung von Frenkel, Lepowsky und Meurmann (vgl. [FLM88], Einleitung S. xxxiii).

Zu unimodularen geraden Gittern kann man außer der Gitter-VOA V_L stets auch eine $\mathbf{Z}_2$-Orbifold-VOA V_L^{twist} konstruieren (vgl. [DGH88, DGM90b, DGM90a]). Die Konstruktion ist mathematisch exakt formulierbar (s. [Lep92], Abschnitt 4). Der Charakter in Abhängigkeit vom Rang c ist

$$\chi_{V_L^{\mathrm{twist}}} = q^{-\frac{c}{24}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\Theta_L}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^c} + \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)^c}\right) +$$

Table 5.1: Charaktere der extremalen VOAs für die Ränge $c = 8, 16, \ldots, 48$ und 72

$c = 8$:	$q^{-1/3}(1 + 248\,q + 4124\,q^2 + 34752\,q^3 + 213126\,q^4 + 1057504\,q^5 + 4530744\,q^6 + \cdots)$
$c = 16$:	$q^{-2/3}(1 + 496\,q + 69752\,q^2 + 2115008\,q^3 + 34670620\,q^4 + 394460000\,q^5 + \cdots)$
$c = 24$:	$q^{-1}(1 + 196884\,q^2 + 21493760\,q^3 + 864299970\,q^4 + 20245856256q^5 + \cdots)$
$c = 32$:	$q^{-4/3}(1 + 139504\,q^2 + 69332992\,q^3 + 6998296696\,q^4 + 330022830080\,q^5 + \cdots)$
$c = 40$:	$q^{-5/3}(1 + 20620\,q^2 + 86666240\,q^3 + 24243884350\,q^4 + 2347780456448\,q^5 + \cdots)$
$c = 48$:	$q^{-2}(1 + q^2 + 42987520\,q^3 + 40491909396\,q^4 + 8504046600192\,q^5 + \cdots)$
$c = 72$:	$q^{-3}(1 + q^2 + q^3 + 2593096794\,q^4 + 12756091394048\,q^5 + 9529321553850114\,q^6 + \cdots)$

$$q^{-\frac{c}{24}+\frac{c}{16}} \cdot 2^{\frac{c}{2}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - q^{n-\frac{1}{2}}\right)^c} + (-1)^{\frac{c}{8}}\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + q^{n-\frac{1}{2}}\right)^c}\right). \quad (5.8)$$

Für $c = 32$ und $c = 40$ sind daher die $\mathbf{Z}_2$-Orbifold-VOAs zu den extremalen geraden Gittern in diesen Dimensionen extremal, d.h. es gilt $V_1 = 0$. Die Selbstdualität ist zu vermuten. Da in den Dimensionen 32 und 40 nichtisomorphe extremale Gitter existieren (s. [CS93], Kap. 7.7), gibt es auch nichtisomorphe extremale VOAs.

Für $c \geq 48$ sind keine extremalen VOAs bekannt.

Tabelle 5.1 enthält den Beginn der extremalen Charaktere für die Ränge $c = 8, 16, \ldots, 48$ und 72.

5.3 Extremale selbstduale SVOAs

Die extremalen ungeraden selbstdualen Codes (s. [MS73, War76]) und Gitter (s. [COS78]) lassen sich alle explizit angeben. In diesem Abschnitt beweisen wir ein analoges Resultat für extremale SVOAs, wobei die vermutete Eindeutigkeit der angegebenen SVOAs allerdings offen bleibt.

Sei V in diesem Abschnitt eine selbstduale „sehr schöne“ unitäre und rationale SVOA vom Rang c. Nach Satz 2.2.3 ist c eine halbganze Zahl und ihr Charakter ist ein Laurentpolynom in $\chi_{1/2} = \sqrt[24]{j_\theta} = q^{-1/48}(1 + q^{1/2} + q^{3/2} + q^2 + \cdots)$:

$$\chi_V = \sum_{r=0}^{k} a_r \chi_{1/2}^{2c-24r}, \quad k = \left[\frac{c}{8}\right], \quad (5.9)$$

mit eindeutigen ganzen Zahlen $a_0, \ldots, a_k$.

Definition 5.3.1 *Sind die a_r so gewählt, daß*

$$\chi_V = \chi_{M_c} \cdot (1 + A_{k+1} \cdot q^{\frac{k+1}{2}} + A_{k+2} \cdot q^{\frac{k+2}{2}} + \cdots), \tag{5.10}$$

so heißt (5.10) der extremale Charakter in Rang c und eine SVOA mit diesem Charakter eine extremale SVOA.

Eine extremale selbstduale SVOA kann sogar auch schon eine VOA sein.

Wegen Gleichung (5.1) gilt für das Minimalgewicht einer extremalen SVOA $\mu(V) \geq \frac{1}{2}\left[\frac{c}{8}\right] + \frac{1}{2}$.

Hauptresultat dieses Kapitels ist der

Satz 5.3.2 *Extremale selbstduale „sehr schöne" unitäre rationale SVOAs existieren genau für die Ränge $c \in E := \{0, \frac{1}{2}, 1, \ldots, \frac{15}{2}, 8, 12, 14, 15, \frac{31}{2}, \frac{47}{2}, 24\}$. Für jeden dieser Werte ist genau eine SVOA bekannt:*

c	0–$\frac{15}{2}$	8	12	14	15	$\frac{31}{2}$	$\frac{47}{2}$	24
SVOA	$V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes 2c}$	V_{E_8}	$V_{D_{12}^+}$	$V_{(E_7+E_7)^+}$	$V_{A_{15}^+}$	$V_{E_{8,2}^+}$	$VB^\natural$	$V^\natural$

Der Satz wird allerdings nur unter den folgenden Einschränkungen bewiesen:
— Für $c \in \{10, 11, \frac{25}{2}, 13, \frac{27}{2}, \frac{29}{2}\}$ muß die Vollständigkeit der Liste der selbstdualen VOAs in Vermutung 3.2.3 vorausgesetzt werden,
— für $c = \frac{31}{2}$ ist die SVOA-Struktur nicht vollständig konstruiert,
— und für $c = \frac{31}{2}$ oder $\frac{47}{2}$ ist die Selbstdualität nicht gezeigt.

Anmerkungen:
— Es wird vermutet, daß die angegebenen SVOAs für den jeweiligen Rang eindeutig sind. Für $0 \leq c < 8$ ist dies Satz 2.2.7. Für $8 \leq c < 16$ folgt die angegebene Struktur der von den Gewicht 1 Vektoren erzeugten Unter-VOA aus der Annahme der Eigenschaft *L-Lie* (s. 1.2.8); siehe dazu auch Vermutung 3.2.3 und Satz 3.2.4. Für $VB^\natural$ wurde die Eindeutigkeit schon in Kapitel 4 vermutet und für $V^\natural$ ist es wieder die Eindeutigkeitsvermutung aus [FLM88].
— Die SVOAs V_{E_8} und $V^\natural$ sind sogar extremale VOAs.

Tabelle 5.2 faßt alle extremalen ungeraden Codes und Gitter bzw. SVOAs in einem Übersichtsdiagramm zusammen. Die Pfeile von Codes zu Gittern symbolisieren darin die auf S. 7 beschriebene Konstruktion $C \to L_C$; die Pfeile von Gittern zu SVOAs symbolisieren die Konstruktion der Gitter-SVOA zu diesem Gitter (s. Satz 1.2.6).

Aus Satz 5.3.2 folgt unmittelbar das

Korollar 5.3.3 *Das Minimalgewicht einer selbstdualen SVOA V erfüllt $\mu(V) \leq \frac{1}{2}\left[\frac{c}{8}\right] + \frac{1}{2}$.*

Table 5.2: Extremale ungerade Codes, Gitter und SVOAs

Rang	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{11}{2}$	6	$\frac{13}{2}$	7	$\frac{15}{2}$
Codes				c_2				c_2^2				c_2^3			
				$\downarrow$				$\downarrow$				$\downarrow$			
Gitter		$\mathbf{Z}$		$\mathbf{Z}^2$		$\mathbf{Z}^3$		$\mathbf{Z}^4$		$\mathbf{Z}^5$		$\mathbf{Z}^6$		$\mathbf{Z}^7$	
		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	
SVOAs	V_F	V_F^2	V_F^3	V_F^4	V_F^5	V_F^6	V_F^7	V_F^8	V_F^9	V_F^{10}	V_F^{11}	V_F^{12}	V_F^{13}	V_F^{14}	V_F^{15}

Rang	8	12	14	15	$\frac{31}{2}$	22	23	$\frac{47}{2}$	24
Codes	e_8	d_{12}^+	$(e_7+e_7)^+$			g_{22}			g_{24}
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$						
Gitter	E_8	D_{12}^+	$(E_7+E_7)^+$	A_{15}^+			O_{23}		Λ_{24}
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$					
SVOAs	V_{E_8}	$V_{D_{12}^+}$	$V_{(E_7+E_7)^+}$	$V_{A_{15}^+}$	$V_{E_{8,2}^+}$			$VB^\natural$	$V^\natural$

Die $\mu(V) \leq \frac{1}{2}[\frac{c}{8}] + \frac{1}{2}$ entsprechenden Abschätzungen für das Minimalgewicht von Codes bzw. Gittern sind asymptotisch schlecht (siehe [CS90a, CS91, CS90b]). Vermutlich gilt ein ähnliches Resultat wie dort auch für SVOAs. Wir definieren extremal trotzdem wie in Definition 5.3.1, um mit der Notation bei Codes und Gittern konform zu sein.

Beweis von Satz 5.3.2: Die Beweisidee ist völlig analog zum Beweis der entsprechenden Sätze für ungerade Codes bzw. Gitter.

Existenz der extremalen SVOAs für $c \in E$:

Für $0 \leq c < 8$ ist der extremale Charakter $\chi_{1/2}^{2c}$. Nach (2.2.6) ist V_{Fermi}^{2c} eine selbstduale SVOA mit diesem Charakter.

Im Bereich $8 \leq c < 16$ beginnt der extremale Charakter mit $\chi_V = q^{-c/24}(1 + A_2 q + \cdots)$. Für die in Satz 3.2.3 angegebenen SVOAs gilt $V_{1/2} = 0$, und die Selbstdualität für V_{E_8}, $V_{D_{12}^+}$, $V_{(E_7+E_7)^+}$ und $V_{A_{15}^+}$ folgt aus der Konstruktion als Gitter-SVOA. Für $V_{E_{8,2}^+}$ sind Existenz und Selbstdualität nicht vollständig gezeigt.

Für $c = 47/2$ ist die in Kapitel 4 konstruierte Babymonster-SVOA $VB^\natural$ extremal, da nach Satz 4.2.8 $\chi_{VB^\natural} = \chi_{1/2}^{47} - 47\chi_{1/2}^{23} = q^{-47/48}(1 + 4371\, q^{3/2} + \cdots)$; die Selbstdualität wurde vermutet (Vermutung 4.2.9).

Schließlich ist für $c = 24$ die Monster-VOA $V^\natural$ extremal. Die Selbstdualität wurde von C. Dong in [Don94] gezeigt.

In Tabelle 5.3 sind alle Charaktere der extremalen SVOAs aufgelistet. Die erste Spalte

Table 5.3: Charaktere der extremalen SVOAs

V	c	Charaktere
$\mathbf{1}$	0	1 VOA
V_{Fermi}	$\frac{1}{2}$	$q^{-\frac{1}{48}}(1+q^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{3}{2}}+q^2+q^{\frac{5}{2}}+q^3+q^{\frac{7}{2}}+2\,q^4+2\,q^{\frac{9}{2}}+2\,q^5+2\,q^{\frac{11}{2}}+\cdots)$ $q^{-\frac{1}{48}}(q^{\frac{1}{16}}+q^{\frac{17}{16}}+q^{\frac{33}{16}}+2\,q^{\frac{49}{16}}+2\,q^{\frac{65}{16}}+3\,q^{\frac{81}{16}}+4\,q^{\frac{97}{16}}+\cdots)$
$V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes 2}$	1	$q^{-\frac{2}{48}}(1+2\,q^{\frac{1}{2}}+q+2\,q^{\frac{3}{2}}+4\,q^2+4\,q^{\frac{5}{2}}+5\,q^3+6\,q^{\frac{7}{2}}+9\,q^4+12\,q^{\frac{9}{2}}+13\,q^5+16\,q^{\frac{11}{2}}+\cdots)$ $q^{-\frac{2}{48}}(q^{\frac{1}{8}}+2\,q^{\frac{9}{8}}+3\,q^{\frac{17}{8}}+6\,q^{\frac{25}{8}}+9\,q^{\frac{33}{8}}+14\,q^{\frac{41}{8}}+22\,q^{\frac{49}{8}}+\cdots)$
$V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes 3}$	$\frac{3}{2}$	$q^{-\frac{3}{48}}(1+3\,q^{\frac{1}{2}}+3\,q+4\,q^{\frac{3}{2}}+9\,q^2+12\,q^{\frac{5}{2}}+15\,q^3+21\,q^{\frac{7}{2}}+30\,q^4+43\,q^{\frac{9}{2}}+54\,q^5+69\,q^{\frac{11}{2}}+\cdots)$ $q^{-\frac{3}{48}}(2\,q^{\frac{3}{16}}+6\,q^{\frac{19}{16}}+12\,q^{\frac{35}{16}}+26\,q^{\frac{51}{16}}+48\,q^{\frac{67}{16}}+84\,q^{\frac{83}{16}}+146\,q^{\frac{99}{16}}+\cdots)$
$V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes 4}$	2	$q^{-\frac{4}{48}}(1+4\,q^{\frac{1}{2}}+6\,q+8\,q^{\frac{3}{2}}+17\,q^2+28\,q^{\frac{5}{2}}+38\,q^3+56\,q^{\frac{7}{2}}+84\,q^4+124\,q^{\frac{9}{2}}+172\,q^5+\cdots)$ $q^{-\frac{4}{48}}(2\,q^{\frac{1}{4}}+8\,q^{\frac{5}{4}}+20\,q^{\frac{9}{4}}+48\,q^{\frac{13}{4}}+102\,q^{\frac{17}{4}}+200\,q^{\frac{21}{4}}+380\,q^{\frac{25}{4}}+\cdots)$
$V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes 5}$	$\frac{5}{2}$	$q^{-\frac{5}{48}}(1+5\,q^{\frac{1}{2}}+10\,q+15\,q^{\frac{3}{2}}+30\,q^2+56\,q^{\frac{5}{2}}+85\,q^3+130\,q^{\frac{7}{2}}+205\,q^4+315\,q^{\frac{9}{2}}+465\,q^5+\cdots)$ $q^{-\frac{5}{48}}(4\,q^{\frac{5}{16}}+20\,q^{\frac{21}{16}}+60\,q^{\frac{37}{16}}+160\,q^{\frac{53}{16}}+380\,q^{\frac{69}{16}}+824\,q^{\frac{85}{16}}+\cdots)$
$V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes 6}$	3	$q^{-\frac{6}{48}}(1+6\,q^{\frac{1}{2}}+15\,q+26\,q^{\frac{3}{2}}+51\,q^2+102\,q^{\frac{5}{2}}+172\,q^3+276\,q^{\frac{7}{2}}+453\,q^4+728\,q^{\frac{9}{2}}+1128\,q^5+\cdots)$ $q^{-\frac{6}{48}}(4\,q^{\frac{3}{8}}+24\,q^{\frac{11}{8}}+84\,q^{\frac{19}{8}}+248\,q^{\frac{27}{8}}+648\,q^{\frac{35}{8}}+1536\,q^{\frac{43}{8}}+\cdots)$
$V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes 7}$	$\frac{7}{2}$	$q^{-\frac{7}{48}}(1+7\,q^{\frac{1}{2}}+21\,q+42\,q^{\frac{3}{2}}+84\,q^2+175\,q^{\frac{5}{2}}+322\,q^3+547\,q^{\frac{7}{2}}+931\,q^4+1561\,q^{\frac{9}{2}}+2527\,q^5+\cdots)$ $q^{-\frac{7}{48}}(8\,q^{\frac{7}{16}}+56\,q^{\frac{23}{16}}+224\,q^{\frac{39}{16}}+728\,q^{\frac{55}{16}}+2072\,q^{\frac{71}{16}}+5320\,q^{\frac{87}{16}}+\cdots)$
$V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes 8}$	4	$q^{-\frac{8}{48}}(1+8\,q^{\frac{1}{2}}+28\,q+64\,q^{\frac{3}{2}}+134\,q^2+288\,q^{\frac{5}{2}}+568\,q^3+1024\,q^{\frac{7}{2}}+1809\,q^4+3152\,q^{\frac{9}{2}}+\cdots)$ $q^{-\frac{8}{48}}(8\,q^{\frac{1}{2}}+64\,q^{\frac{3}{2}}+288\,q^{\frac{5}{2}}+1024\,q^{\frac{7}{2}}+3152\,q^{\frac{9}{2}}+\cdots)$
$V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes 9}$	$\frac{9}{2}$	$q^{-\frac{9}{48}}(1+9\,q^{\frac{1}{2}}+36\,q+93\,q^{\frac{3}{2}}+207\,q^2+459\,q^{\frac{5}{2}}+957\,q^3+1827\,q^{\frac{7}{2}}+3357\,q^4+6061\,q^{\frac{9}{2}}+\cdots)$ $q^{-\frac{9}{48}}(16\,q^{\frac{9}{16}}+144\,q^{\frac{25}{16}}+720\,q^{\frac{41}{16}}+2784\,q^{\frac{57}{16}}+9216\,q^{\frac{73}{16}}+27216\,q^{\frac{89}{16}}+\cdots)$
$V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes 10}$	5	$q^{-\frac{10}{48}}(1+10\,q^{\frac{1}{2}}+45\,q+130\,q^{\frac{3}{2}}+310\,q^2+712\,q^{\frac{5}{2}}+1555\,q^3+3130\,q^{\frac{7}{2}}+5990\,q^4+11190\,q^{\frac{9}{2}}+\cdots)$ $q^{-\frac{10}{48}}(16\,q^{\frac{5}{8}}+160\,q^{\frac{13}{8}}+880\,q^{\frac{21}{8}}+3680\,q^{\frac{29}{8}}+13040\,q^{\frac{37}{8}}+40992\,q^{\frac{45}{8}}+\cdots)$
$V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes 11}$	$\frac{11}{2}$	$q^{-\frac{11}{48}}(1+11\,q^{\frac{1}{2}}+55\,q+176\,q^{\frac{3}{2}}+451\,q^2+1078\,q^{\frac{5}{2}}+2453\,q^3+5181\,q^{\frac{7}{2}}+10329\,q^4+19954\,q^{\frac{9}{2}}+\cdots)$ $q^{-\frac{11}{48}}(32\,q^{\frac{11}{16}}+352\,q^{\frac{27}{16}}+2112\,q^{\frac{43}{16}}+9504\,q^{\frac{59}{16}}+35904\,q^{\frac{75}{16}}+119680\,q^{\frac{91}{16}}+\cdots)$
$V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes 12}$	6	$q^{-\frac{12}{48}}(1+12\,q^{\frac{1}{2}}+66\,q+232\,q^{\frac{3}{2}}+639\,q^2+1596\,q^{\frac{5}{2}}+3774\,q^3+8328\,q^{\frac{7}{2}}+17283\,q^4+34520\,q^{\frac{9}{2}}+\cdots)$ $q^{-\frac{12}{48}}(32\,q^{\frac{3}{4}}+384\,q^{\frac{7}{4}}+2496\,q^{\frac{11}{4}}+12032\,q^{\frac{15}{4}}+48288\,q^{\frac{19}{4}}+170112\,q^{\frac{23}{4}}+\cdots)$
$V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes 13}$	$\frac{13}{2}$	$q^{-\frac{13}{48}}(1+13\,q^{\frac{1}{2}}+78\,q+299\,q^{\frac{3}{2}}+884\,q^2+2314\,q^{\frac{5}{2}}+5681\,q^3+13052\,q^{\frac{7}{2}}+28158\,q^4+58136\,q^{\frac{9}{2}}+\cdots)$ $q^{-\frac{13}{48}}(64\,q^{\frac{13}{16}}+832\,q^{\frac{29}{16}}+5824\,q^{\frac{45}{16}}+29952\,q^{\frac{61}{16}}+127296\,q^{\frac{77}{16}}+472576\,q^{\frac{93}{16}}+\cdots)$
$V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes 14}$	7	$q^{-\frac{14}{48}}(1+14\,q^{\frac{1}{2}}+91\,q+378\,q^{\frac{3}{2}}+1197\,q^2+3290\,q^{\frac{5}{2}}+8386\,q^3+20008\,q^{\frac{7}{2}}+44800\,q^4+\cdots)$ $q^{-\frac{14}{48}}(64\,q^{\frac{7}{8}}+896\,q^{\frac{15}{8}}+6720\,q^{\frac{23}{8}}+36736\,q^{\frac{31}{8}}+164864\,q^{\frac{39}{8}}+643328\,q^{\frac{47}{8}}+\cdots)$
$V_{\mathrm{Fermi}}^{\otimes 15}$	$\frac{15}{2}$	$q^{-\frac{15}{48}}(1+15\,q^{\frac{1}{2}}+105\,q+470\,q^{\frac{3}{2}}+1590\,q^2+4593\,q^{\frac{5}{2}}+12160\,q^3+30075\,q^{\frac{7}{2}}+69780\,q^4+\cdots)$ $q^{-\frac{15}{48}}(128\,q^{\frac{15}{16}}+1920\,q^{\frac{31}{16}}+15360\,q^{\frac{47}{16}}+88960\,q^{\frac{63}{16}}+420480\,q^{\frac{79}{16}}+1720704\,q^{\frac{95}{16}}+\cdots)$
V_{E_8}	8	$q^{-\frac{1}{3}}(1+248\,q+4124\,q^2+34752\,q^3+213126\,q^4+1057504\,q^5+4530744\,q^6+\cdots)$ VOA
$V_{D_{12}^+}$	12	$q^{-\frac{24}{48}}(1+276\,q+2048\,q^{\frac{3}{2}}+11202\,q^2+49152\,q^{\frac{5}{2}}+184024\,q^3+614400\,q^{\frac{7}{2}}+1881471\,q^4\cdots)$ $q^{-\frac{24}{48}}(12\,q^{\frac{1}{2}}+2048\,q^{\frac{3}{2}}+49152\,q^{\frac{5}{2}}+614400\,q^{\frac{7}{2}}+5373952\,q^{\frac{9}{2}}+37122048\,q^{\frac{11}{2}}+\cdots)$
$V_{(E_7+E_7)^+}$	14	$q^{-\frac{28}{48}}(1+266\,q+3136\,q^{\frac{3}{2}}+21035\,q^2+108416\,q^{\frac{5}{2}}+468846\,q^3+1777472\,q^{\frac{7}{2}}+6094557\,q^4+\cdots)$ $q^{-\frac{28}{48}}(56\,q^{\frac{3}{4}}+8416\,q^{\frac{7}{4}}+229936\,q^{\frac{11}{4}}+3327296\,q^{\frac{15}{4}}+33491752\,q^{\frac{19}{4}}+264189408\,q^{\frac{23}{4}}+\cdots)$
$V_{A_{15}^+}$	15	$q^{-\frac{30}{48}}(1+255\,q+3640\,q^{\frac{3}{2}}+27525\,q^2+154056\,q^{\frac{5}{2}}+713850\,q^3+2878920\,q^{\frac{7}{2}}+10432650\,q^4+\cdots)$ $q^{-\frac{30}{48}}(120\,q^{\frac{7}{8}}+17104\,q^{\frac{15}{8}}+494040\,q^{\frac{23}{8}}+7626000\,q^{\frac{31}{8}}+81775600\,q^{\frac{39}{8}}+685224960\,q^{\frac{47}{8}}+\cdots)$
$V_{E_{8,2}^+}$	$\frac{31}{2}$	$q^{-\frac{31}{48}}(1+248\,q+3875\,q^{\frac{3}{2}}+31124\,q^2+181753\,q^{\frac{5}{2}}+871627\,q^3+3623869\,q^{\frac{7}{2}}+13496501\,q^4+\cdots)$ $q^{-\frac{31}{48}}(248\,q^{\frac{15}{16}}+34504\,q^{\frac{31}{16}}+1022752\,q^{\frac{47}{16}}+16275496\,q^{\frac{63}{16}}+179862248\,q^{\frac{79}{16}}+\cdots)$
$VB^{\natural}$	$\frac{47}{2}$	$q^{-\frac{47}{48}}(1+4371\,q^{\frac{3}{2}}+96256\,q^2+1143745\,q^{\frac{5}{2}}+9646891\,q^3+64680601\,q^{\frac{7}{2}}+366845011\,q^4+\cdots)$ $q^{-\frac{47}{48}}(96256\,q^{\frac{31}{16}}+10602496\,q^{\frac{47}{16}}+420831232\,q^{\frac{63}{16}}+9685952512\,q^{\frac{79}{16}}+156435924992\,q^{\frac{95}{16}}+\cdots)$
$V^{\natural}$	24	$q^{-1}(1+196884\,q^2+21493760\,q^3+864299970\,q^4+20245856256\,q^5+333202640600\,q^6+\cdots)$ VOA

gibt die SVOA, die zweite den Rang an. In der dritten Spalte zeigt die erste Zeile eines Eintrages den Charakter $\chi_V = \chi_{V_{(0)}} + \chi_{V_{(1)}}$, die zweite den Charakter $\chi_{V_{(2)}} = \chi_{V_{(3)}}$ der irreduziblen $V_{(0)}$-Moduln $V_{(2)}$ und $V_{(3)}$ (falls existent).

Nichtexistenz der extremalen SVOAs für $c \notin E$:

Falls V sogar eine selbstduale VOA ist, gilt nach Korollar 5.2.3 $\mu(V) \leq [c/24] + 1$ und $8|c$. Da für V als extremale SVOA $\mu(V) \geq \frac{1}{2}[\frac{c}{8}] + \frac{1}{2}$ ist, folgt $c = 8$ oder 24, d.h. $c \in E$. Wir können daher voraussetzen, daß V eine SVOA mit $V_{(1)} \neq 0$ ist.

Sei $V_{(0)}$ die gerade Unter-VOA von V. Da wir V als „sehr schön“ vorausgesetzt haben, gilt $V = V_{(0)} \oplus V_{(1)}$ mit irreduziblen $V_{(0)}$-Moduln $V_{(0)}$ und $V_{(1)}$. Zusätzlich besitzt $V_{(0)}$ für $c \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}$ einen dritten irreduziblen Modul $V_{(2)}$ bzw. für $c \in \mathbf{Z}$ zwei irreduzible Moduln $V_{(2)}$ und $V_{(3)}$. Für den Charakter gilt $\chi_V = \chi_{V_{(0)}} + \chi_{V_{(1)}}$. Bezeichnen wir mit $\widetilde{\chi}_V$ die Entwicklung von χ_V in der Spitze 1, so erhalten wir nach Definition 2.2.4 und Satz 2.2.5 den Charakter der Moduln $V_{(2)}$ bzw. $V_{(3)}$:

$$e^{2c\cdot\frac{2\pi i}{48}}\,\widetilde{\chi}_V = \begin{cases} \chi_{V_{(2)}} + \chi_{V_{(3)}}, & \text{falls } c \in \mathbf{Z}, \\ \sqrt{2}\chi_{V_{(2)}}, & \text{falls } c \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{5.11}$$

Die Koeffizienten der Charaktere $\chi_{V_{(0)}}$, $\chi_{V_{(1)}}$, $\chi_{V_{(2)}} + \chi_{V_{(3)}}$ müssen positive ganze Zahlen sein. Wir haben somit die folgenden Nichtexistenzargumente:
Argument N: Mindestens ein Koeffizient von $\chi_{V_{(2)}} + \chi_{V_{(3)}}$ ist negativ.
Argument G: Mindestens ein Koeffizient von $\chi_{V_{(2)}} + \chi_{V_{(3)}}$ ist nicht ganz.
In den Fällen $c \in \{10, 11, \frac{25}{2}, 13, \frac{27}{2}, \frac{29}{2}\}$ reichen diese Argumente nicht aus, und wir benötigen
Argument L: Die Liste der in (3.11) angegebenen selbstdualen SVOAs im Bereich $8 \leq c < 16$ ist vollständig (Vermutung 3.2.3, vgl. die dortige Diskussion und Satz 3.2.4).

Wir fassen die Rechnungen für den Bereich $8 < c < 48$ in zwei Tabellen zusammen.
Tabelle 5.4 behandelt die Fälle $8 < c < 24$, $c \notin E$: In Spalte 1 ist der Rang c angegeben, Spalte 2 und 3 geben die ersten Koeffizienten der q-Entwicklung von $q^{c/24}(\chi_{V_{(0)}} + \chi_{V_{(1)}})$ bzw. $q^{c/24}(\chi_{V_{(2)}} + \chi_{V_{(3)}})$ an und in Spalte 4 sind das oder die Nichtexistenzargumente angegeben.
Tabelle 5.5 behandelt die Fälle $24 < c < 48$: Aufgelistet sind der Rang und der erste Koeffizient $B^* = B_0$ ($c \in \mathbf{Z}$) bzw. $B^* = B_0/\sqrt{2}$ ($c \in \mathbf{Z} + 1/2$) von $\chi_{V_{(2)}} + \chi_{V_{(3)}}$ bzw. $\chi_{V_{(2)}}$. Er ist nie ganz, und daher kann nach Argument G für diese Ränge keine extremale SVOA existieren.

Die Einträge in den Tabellen 5.4 und 5.5 ergeben sich leicht durch Gleichsetzen von (5.9) und (5.10), sowie durch (5.11) und der Entwicklung von $\chi_{1/2}$ in der Spitze 1 in der lokalen Koordinate $q^{1/24}$ (vgl. (1.12)):

$$\widetilde{\chi}_{1/2} = e^{-\frac{2\pi i}{48}}\sqrt{2}\cdot q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) = e^{-\frac{2\pi i}{48}}\sqrt{2}\cdot q^{\frac{1}{24}}(1+q+q^2+\cdots). \tag{5.12}$$

Table 5.4: Extremale Charaktere für $c < 24$, $c \notin E$

$\frac{17}{2}$	$1 + 255\,q + 221\,q^{\frac{3}{2}} + 4216\,q^2 + 4114\,q^{\frac{5}{2}} + 35666\,q^3 + \cdots$	$\frac{17}{16}\,q^{\frac{1}{16}} + \frac{3977}{16}\,q^{\frac{17}{16}} + \frac{69989}{16}\,q^{\frac{33}{16}} + \cdots$	G
9	$1 + 261\,q + 456\,q^{\frac{3}{2}} + 4500\,q^2 + 8424\,q^{\frac{5}{2}} + 40641\,q^3 + \cdots$	$\frac{9}{4}\,q^{\frac{1}{8}} + \frac{997}{2}\,q^{\frac{9}{8}} + \frac{36999}{4}\,q^{\frac{17}{8}} + \cdots$	G
$\frac{19}{2}$	$1 + 266\,q + 703\,q^{\frac{3}{2}} + 4997\,q^2 + 13091\,q^{\frac{5}{2}} + 49989\,q^3 + \cdots$	$\frac{19}{8}\,q^{\frac{3}{16}} + \frac{4001}{8}\,q^{\frac{19}{16}} + \frac{39007}{4}\,q^{\frac{35}{16}} + \cdots$	G
10	$1 + 270\,q + 960\,q^{\frac{3}{2}} + 5725\,q^2 + 18304\,q^{\frac{5}{2}} + 64150\,q^3 + \cdots$	$5\,q^{\frac{1}{4}} + 1004\,q^{\frac{5}{4}} + 20510\,q^{\frac{9}{4}} + \cdots$	L
$\frac{21}{2}$	$1 + 273\,q + 1225\,q^{\frac{3}{2}} + 6699\,q^2 + 24276\,q^{\frac{5}{2}} + 83727\,q^3 + \cdots$	$\frac{21}{4}\,q^{\frac{5}{16}} + \frac{4033}{4}\,q^{\frac{21}{16}} + \frac{86079}{4}\,q^{\frac{37}{16}} + \cdots$	G
11	$1 + 275\,q + 1496\,q^{\frac{3}{2}} + 7931\,q^2 + 31240\,q^{\frac{5}{2}} + 109516\,q^3 + \cdots$	$11\,q^{\frac{3}{8}} + 2026\,q^{\frac{11}{8}} + 45067\,q^{\frac{19}{8}} + \cdots$	L
$\frac{23}{2}$	$1 + 276\,q + 1771\,q^{\frac{3}{2}} + 9430\,q^2 + 39445\,q^{\frac{5}{2}} + 142531\,q^3 + \cdots$	$\frac{23}{2}\,q^{\frac{7}{16}} + \frac{4073}{2}\,q^{\frac{23}{16}} + 47104\,q^{\frac{39}{16}} + \cdots$	G
$\frac{25}{2}$	$1 + 275\,q + 2325\,q^{\frac{3}{2}} + 13250\,q^2 + 60630\,q^{\frac{5}{2}} + 235500\,q^3 + \cdots$	$25\,q^{\frac{9}{16}} + 4121\,q^{\frac{25}{16}} + 102425\,q^{\frac{41}{16}} + \cdots$	L
13	$1 + 273\,q + 2600\,q^{\frac{3}{2}} + 15574\,q^2 + 74152\,q^{\frac{5}{2}} + 298727\,q^3 + \cdots$	$52\,q^{\frac{5}{8}} + 8296\,q^{\frac{13}{8}} + 213148\,q^{\frac{21}{8}} + \cdots$	L
$\frac{27}{2}$	$1 + 270\,q + 2871\,q^{\frac{3}{2}} + 18171\,q^2 + 89991\,q^{\frac{5}{2}} + 375741\,q^3 + \cdots$	$54\,q^{\frac{11}{16}} + 8354\,q^{\frac{27}{16}} + 221508\,q^{\frac{43}{16}} + \cdots$	L
$\frac{29}{2}$	$1 + 261\,q + 3393\,q^{\frac{3}{2}} + 24157\,q^2 + 129688\,q^{\frac{5}{2}} + 580609\,q^3 + \cdots$	$116\,q^{\frac{13}{16}} + 16964\,q^{\frac{29}{16}} + 476876\,q^{\frac{45}{16}} + \cdots$	L
16	$1 + 7936\,q^{\frac{3}{2}} + 2296\,q^2 + 412672\,q^{\frac{5}{2}} + 65536\,q^3 + \cdots$	$-\frac{15}{16} + 527\,q + \frac{139039}{2}\,q^2 + 2116124\,q^3 \cdots$	N, G
$\frac{33}{2}$	$1 + 7766\,q^{\frac{3}{2}} + 11220\,q^2 + 408507\,q^{\frac{5}{2}} + 515251\,q^3 + \cdots$	$\frac{-231}{256}\,q^{\frac{1}{16}} + \frac{138633}{256}\,q^{\frac{17}{16}} + \frac{17969473}{256}\,q^{\frac{33}{16}} + \cdots$	N, G
17	$1 + 7582\,q^{\frac{3}{2}} + 19907\,q^2 + 413678\,q^{\frac{5}{2}} + 956573\,q^3 + \cdots$	$\frac{-221}{128}\,q^{\frac{1}{8}} + \frac{71179}{64}\,q^{\frac{9}{8}} + \frac{18149745}{128}\,q^{\frac{17}{8}} + \cdots$	N, G
$\frac{35}{2}$	$1 + 7385\,q^{\frac{3}{2}} + 28315\,q^2 + 427987\,q^{\frac{5}{2}} + 1398635\,q^3 + \cdots$	$\frac{-105}{64}\,q^{\frac{3}{16}} + \frac{73045}{64}\,q^{\frac{19}{16}} + \frac{4584449}{32}\,q^{\frac{35}{16}} + \cdots$	N, G
18	$1 + 7176\,q^{\frac{3}{2}} + 36405\,q^2 + 451152\,q^{\frac{5}{2}} + 1850520\,q^3 + \cdots$	$\frac{-99}{32}\,q^{\frac{1}{4}} + \frac{18729}{8}\,q^{\frac{5}{4}} + \frac{4633405}{16}\,q^{\frac{9}{4}} + \cdots$	N, G
$\frac{37}{2}$	$1 + 6956\,q^{\frac{3}{2}} + 44141\,q^2 + 482813\,q^{\frac{5}{2}} + 2321121\,q^3 + \cdots$	$\frac{-185}{64}\,q^{\frac{5}{16}} + \frac{153587}{64}\,q^{\frac{21}{16}} + \frac{18737217}{64}\,q^{\frac{37}{16}} + \cdots$	N, G
19	$1 + 6726\,q^{\frac{3}{2}} + 51490\,q^2 + 522538\,q^{\frac{5}{2}} + 2819011\,q^3 + \cdots$	$\frac{-171}{32}\,q^{\frac{3}{8}} + \frac{78679}{16}\,q^{\frac{11}{8}} + \frac{18948593}{32}\,q^{\frac{19}{8}} + \cdots$	N, G
$\frac{39}{2}$	$1 + 6487\,q^{\frac{3}{2}} + 58422\,q^2 + 569829\,q^{\frac{5}{2}} + 3352323\,q^3 + \cdots$	$\frac{-39}{8}\,q^{\frac{7}{16}} + \frac{40287}{8}\,q^{\frac{23}{16}} + \frac{1197985}{2}\,q^{\frac{39}{16}} + \cdots$	N, G
20	$1 + 6240\,q^{\frac{3}{2}} + 64910\,q^2 + 624128\,q^{\frac{5}{2}} + 3928640\,q^3 + \cdots$	$\frac{-35}{4}\,q^{\frac{1}{2}} + 10310\,q^{\frac{3}{2}} + 1212171\,q^{\frac{5}{2}} + \cdots$	N, G
$\frac{41}{2}$	$1 + 5986\,q^{\frac{3}{2}} + 70930\,q^2 + 684823\,q^{\frac{5}{2}} + 4554895\,q^3 + \cdots$	$\frac{-123}{16}\,q^{\frac{9}{16}} + \frac{168797}{16}\,q^{\frac{25}{16}} + \frac{19629545}{16}\,q^{\frac{41}{16}} + \cdots$	N, G
21	$1 + 5726\,q^{\frac{3}{2}} + 76461\,q^2 + 751254\,q^{\frac{5}{2}} + 5237281\,q^3 + \cdots$	$\frac{-105}{8}\,q^{\frac{5}{8}} + \frac{86331}{4}\,q^{\frac{13}{8}} + \frac{19872217}{8}\,q^{\frac{21}{8}} + \cdots$	N, G
$\frac{43}{2}$	$1 + 5461\,q^{\frac{3}{2}} + 81485\,q^2 + 822719\,q^{\frac{5}{2}} + 5981171\,q^3 + \cdots$	$\frac{-43}{4}\,q^{\frac{11}{16}} + \frac{88279}{4}\,q^{\frac{27}{16}} + \frac{5030697}{2}\,q^{\frac{43}{16}} + \cdots$	N, G
22	$1 + 5192\,q^{\frac{3}{2}} + 85987\,q^2 + 898480\,q^{\frac{5}{2}} + 6791048\,q^3 + \cdots$	$\frac{-33}{2}\,q^{\frac{3}{4}} + 45122\,q^{\frac{7}{4}} + 5095325\,q^{\frac{11}{4}} + \cdots$	N, G
$\frac{45}{2}$	$1 + 4920\,q^{\frac{3}{2}} + 89955\,q^2 + 977769\,q^{\frac{5}{2}} + 7670445\,q^3 + \cdots$	$\frac{-45}{4}\,q^{\frac{13}{16}} + \frac{184455}{4}\,q^{\frac{29}{16}} + \frac{20922345}{2}\,q^{\frac{23}{8}} \cdots$	N, G
23	$1 + 4646\,q^{\frac{3}{2}} + 93380\,q^2 + 1059794\,q^{\frac{5}{2}} + 8621895\,q^3 + \cdots$	$\frac{-23}{2}\,q^{\frac{7}{8}} + 94231\,q^{\frac{15}{8}} + \frac{20922345}{2}\,q^{\frac{23}{8}} \cdots$	N, G

Table 5.5: Erster Koeffizient des extremalen Charakters bei Entwicklung in der Spitze 1 für $24 < c < 48$, $c \notin E$

Rang	49/2	25	51/2	26	53/2	27	55/2	28	57/2	29
B^*	$\frac{1911}{2048}$	$\frac{1775}{1024}$	$\frac{3281}{2048}$	$\frac{377}{128}$	$\frac{689}{256}$	$\frac{1251}{256}$	$\frac{2255}{512}$	$\frac{63}{8}$	$\frac{893}{128}$	$\frac{783}{64}$

Rang	59/2	30	61/2	31	63/2	32	65/2	33	67/2	34
B^*	$\frac{1357}{128}$	$\frac{145}{8}$	$\frac{61}{4}$	$\frac{403}{16}$	$\frac{651}{32}$	$-\frac{73967}{65536}$	$-\frac{67989}{65536}$	$-\frac{31135}{16384}$	$-\frac{56815}{32768}$	$-\frac{12907}{4096}$

Rang	69/2	35	71/2	36	73/2	37	75/2	38	77/2	39
B^*	$-\frac{5839}{2048}$	$-\frac{42069}{8192}$	$-\frac{9425}{2048}$	$-\frac{33605}{4096}$	$-\frac{29783}{4096}$	$-\frac{3279}{256}$	$-\frac{22949}{2048}$	$-\frac{9965}{512}$	$-\frac{8585}{512}$	$-\frac{14663}{512}$

Rang	79/2	40	81/2	41	83/2	42	85/2	43	87/2	44
B^*	$-\frac{6201}{256}$	$\frac{86155}{65536}$	$\frac{627945}{524288}$	$\frac{285213}{131072}$	$\frac{1033171}{524288}$	$\frac{29145}{8192}$	$\frac{839041}{262144}$	$\frac{376073}{65536}$	$\frac{335859}{65536}$	$\frac{74689}{8192}$

Rang	89/2	45	91/2	46	93/2	47	95/2
B^*	$\frac{132319}{16384}$	$\frac{7293}{512}$	$\frac{409677}{32768}$	$\frac{44723}{2048}$	$\frac{310803}{16384}$	$\frac{134231}{4096}$	$\frac{28811}{1024}$

Zu erledigen bleiben noch die Fälle $c \geq 48$. Wir werden zeigen: In der Entwicklung $e^{2c\cdot\frac{2\pi i}{48}}\widetilde{\chi}_V = q^{c/12-[c/8]}(B_0 + B_1\,q + \cdots)$ von χ_V in der Spitze 1 ist entweder B_0 oder B_1 negativ — Widerspruch nach Argument N bei Verwendung von (5.11).

Dazu setzen wir $p = q^{1/2}$ und entwickeln, ähnlich wie beim Beweis von Satz 5.2.2, $\chi_{M_c}\cdot\chi_{1/2}^{-2c}$ in Potenzen von $\phi := \chi_{1/2}^{-24} = j_\theta^{-1} = p + O(p^2)$:

$$\chi_{M_c}\cdot\chi_{1/2}^{-2c} = \sum_{r=0}^{\infty}\alpha_r\phi^r, \tag{5.13}$$

wobei

$$\begin{aligned}\alpha_r &= \frac{1}{r!}\frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}}\left\{\frac{d(\chi_{M_c}\cdot\chi_{1/2}^{-2c})}{dp}\left(\frac{p}{\phi}\right)^r\right\}_{p=0}\\ &= \frac{1}{r!}\frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}}\left\{p^r\cdot\chi_{1/2}^{24r-2c-3}\left[\chi'_{M_c}\chi_{1/2}^3 - 2c\cdot\chi_{M_c}\chi_{1/2}^2\chi'_{1/2}\right]\right\}_{p=0}.\end{aligned} \tag{5.14}$$

Gleichungen (5.9), (5.10) und (5.13) liefern

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{k}a_r\phi^r &= \chi_V\cdot\chi_{1/2}^{-2c} = \chi_V\cdot\chi_{M_c}^{-1}\cdot\chi_{M_c}\cdot\chi_{1/2}^{-2c}\\ &= \left(1+\sum_{n=k+1}^{\infty}A_np^n\right)\left(\sum_{r=0}^{k}\alpha_r\phi^r + \sum_{r=k+1}^{\infty}\alpha_r\phi^r\right).\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich zeigt $a_r = \alpha_r$ für $0 \leq r \leq k$.

Man betrachte nun die Entwicklung in der Spitze 1. Mit der lokalen Koordinate $q^{1/24}$ erhält man unter Verwendung von (5.12) für den Charakter

$$e^{2c\cdot\frac{2\pi i}{48}}\widetilde{\chi}_V = e^{2c\cdot\frac{2\pi i}{48}}\sum_{r=0}^{k}a_k\widetilde{\chi}_{1/2}^{2c-24r} = q^{\frac{s}{24}}(\sqrt{2})^s\left((-1)^k a_k(1+sq) + (-1)^{k-1}a_{k-1}(\sqrt{2})^{24}q + O(q^2)\right),$$

wobei $s = 2c - 24[\frac{c}{8}] < 0$. Zusammenfassen ergibt

$$= \underbrace{(-1)^k(\sqrt{2})^s a_k}_{B_0}\cdot q^{\frac{s}{24}} + \underbrace{(-1)^{k-1}(\sqrt{2})^s\left(-a_ks + a_{k-1}\cdot 2^{12}\right)}_{B_1}\cdot q^{\frac{s}{24}+1} + \cdots. \tag{5.15}$$

Für $c \geq 48$ und $r = k-1 = [\frac{c}{8}]-1$ oder $r = k = [\frac{c}{8}]$ ist $24r - 2c - 3 \geq 0$, und $\chi_{1/2}^{24r-2c-3}$ hat daher positive Koeffizienten. Da $\chi_{1/2}^3$ der Charakter der SVOA $V_{\rm Fermi}^{\otimes 3}$ vom Rang $\frac{3}{2}$ ist, hat $\frac{\chi_{1/2}^3}{\chi_{M_c}} = q^{c/24-3/48}\left(1+\frac{1}{1-q}\left(\sum_{i\geq 1/2}P_i\,q^i\right)\right)$ nach (5.1) positive Koeffizienten. Es folgt, daß $\chi_{M_c}^2\cdot\left(\frac{\chi_{1/2}^3}{\chi_{M_c}}\right)' = 3\cdot\chi_{M_c}\chi_{1/2}^2\chi'_{1/2} - \chi'_{M_c}\chi_{1/2}^3$ positive und $\chi'_{M_c}\chi_{1/2}^3 - 2c\cdot\chi_{M_c}\chi_{1/2}^2\chi'_{1/2}$ für $c \geq \frac{3}{2}$ negative Koeffizienten hat. Wegen (5.14) sind also $a_k = \alpha_k$ und $a_{k-1} = \alpha_{k-1}$ für $c \geq 48$ beide negativ, d.h. in (5.15) ist entweder B_0 oder B_1 negativ. Dies vervollständigt den Beweis von Satz 5.3.2. $\square$

Alternativ kann man für $8 < c < 112$ die Charaktere explizit ausrechnen und dann zeigen, daß der Koeffizient A_{k+2} ab $c \geq 112$ negativ wird.

Eine diesem Abschnitt gewissermaßen komplementäre Fragestellung ist die Untersuchung von selbstdualen SVOAs V mit möglichst großem Minimalgewicht von $V_{(2)}$ bzw. $V_{(2)} \oplus V_{(3)}$ (dem „Schatten"). Man erhält auch hier wieder Resultate (s. [Höh95]), deren Analoga für Codes und Gitter kürzlich von N. Elkies [Elka, Elkb] beschrieben worden sind. Insbesondere ergibt sich eine weitere Charakterisierung der Babymonster-SVOA $VB^\natural$ sowie — als Folgerung — die Ergebnisse für Codes und Gitter.

Bibliography

[AM88] Greg Anderson und Greg Moore, *Rationality in Conformal Field Theory*, Commun. Math. Phys. **117** (1988), 441–450.

[Apo76] Tom M. Apostol, *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*, Graduate texts in mathematics; 41, Springer-Verlag, New York, 1976.

[Are95] A. Arenas, *Genera and Rational Equivalence Classes of Integral Quadratic Forms*, Journal of Number Theory **51** (1995), 210–218.

[Asc94] Michael Aschbacher, *Sporadic Groups*, Cambridge Tracts in Mathematics 104, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Ati90] Michael Atiyah, *The Geometry and Physics of Knots*, Lezioni Lincee, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Bie79] Jürgen Bierbrauer, *A Characterization of the „Baby Monster“ F_2, Including a note on ${}^2E_6(2)$*, Journ. of Algebra **56** (1979), 384–395.

[BJL85] Th. Beth, D. Jungnickel und H. Lenz, *Design Theory*, Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich, 1985.

[Bor86] R. E. Borcherds, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **83** (1986), 3068–3071.

[Bor92a] R. E. Borcherds, *Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras*, Invent. math. **109** (1992), 405–444.

[Bor92b] Richard E. Borcherds, *Sporadic Groups and String Theorie*, in: First European Congress of Mathematics (Paris, July 6–10, 1992), Vol. I, (Basel, Boston, Berlin) (A. Joseph et al., eds.), Birkhäuser, 1992, pp. 411–421.

[BPZ84] A. A. Belavin, A. M. Polyakov und A. B. Zamalodchikov, *Infinite conformal symmetries in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. **B241** (1984), 333–380.

[BR] Richard E. Borcherds und Alex J. E. Ryba, *Modular Moonshine II*, preprint.

[Cas78] J. W. S. Cassels, *Rational Quadratic Forms*, Academic Press, London, 1978.

[CCN+85] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker und R. A. Wilson, *ATLAS of finite groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[CdG94] F. Constantinescu und H. F. de Groote, *Geometrische und algebraische Methoden der Physik: Supermannigfaltigkeiten und Virasoro-Algebren*, Teubner Studienbücher: Mathemematik, Teubner, Stuttgart, 1994.

[CM95] Marston Conder und John McKay, *Solution of the Marking Problem for M_{24}*, preprint (1995).

[CN79] J. H. Conway und S. P. Norton, *Monstrous Moonshine*, Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 308–339.

[Con84] J. H. Conway, *A simple construction of the Fischer-Griess Monster group*, Invent. Math. **79** (1984), 513–540.

[COS78] J. H. Conway, A. M. Odlyzko und N. J. A. Sloane, *Extremal self-dual lattices exist only in dimensions* 1 *to* 8, 12, 14, 15, 23 *and* 24, Mathematika **25** (1978), 36–43, entspricht Kapitel 19 in [CS93].

[CP80] J. H. Conway und V. Pless, *On the Enumeration of Self-Dual Codes*, Journal of Combinatoial Theory, Series A **28** (1980), 26–53.

[CS82] J. H. Conway und N. J. A. Sloane, *The unimodular lattices of dimension up to 23 and the Minkowski-Siegel mass constants*, European Journal of Combinatorics **3** (1982), 219–231, entspricht Kapitel 16 in [CS93].

[CS90a] J. H. Conway und N. J. A. Sloane, *A New Upper Bound for the Minimum of an Integral Lattice of Determinant* 1, Bulletin of the American Mathematical Society (New Series) **23** (1990), 383–387.

[CS90b] J. H. Conway und N. J. A. Sloane, *A New Upper bound on the Minimal Distance of Self-Dual Codes*, IEEE Transactions on Information Theory **36** (1990), 1319–1333.

[CS91] J. H. Conway und N. J. A. Sloane, *Erratum: A New Upper Bound for the Minimum of an Integral Lattice of Determinant* 1, Bulletin of the American Mathematical Society (New Series) **24** (1991), 479.

[CS93] J. H. Conway und N. J. A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften Band 290, Springer-Verlag, New York, 1993.

[Del73] P. Delsarte, *An algebraic appoach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Reports Supplements, No. 10 (1973).

[DGH88] L. Dixon, P. Ginsparg und J. Harvey, *Beauty and the Beast: Superconformal Symmetry in a Monster Module*, Commun. Math. Phys. **119** (1988), 221–241.

[DGM90a] L. Dolan, P. Goddard und P. Montague, *Conformal Field Theory of Twisted Vertex Operators*, Nuclear Physics B **338** (1990), 529–601.

[DGM90b] L. Dolan, P. Goddard und P. Montague, *Conformal Field Theory, Triality and the Monster Group*, Physical Letters B **236** (1990), 165–172.

[DGS77] P. Delsarte, J.-M. Goethals und J. J. Seidel, *Spherical codes and designs*, Geom. Dedic. **6** (1977), 363–388.

[Dir40] G. L. Dirichlet, *Recherches sur diverses applications de l'analyse de infinitésimale à la théorie de nombres*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **19 und 21** (1839 und 1840), 134–155 und 1–12, 134–155.

[DL93] Chongying Dong und James Lepowsky, *Generalized Vertex Algebras and Relative Vertex Operators*, Progress in Mathematics, Birkhäuser, Boston, 1993.

[DLM] Chongying Dong, Zongzhu Lin und Geoffrey Mason, *On Vertex Operator Algebras as* sl_2*-Modules*, preprint.

[DLM95a] Chongying Dong, Haisheng Li und Geoffrey Mason, *Simple currents and extensions of vertex operator algebras*, preprint, q-alg/9504008 (1995).

[DLM95b] Chongying Dong, Haisheng Li und Geoffrey Mason, *Some twisted sectors for the Moonshine module*, preprint, q-alg/9504014 (1995).

[DM] Chongying Dong und Geoffrey Mason, *An Orbifold theory of genus zero associated to the sporadic group* M_{24}, preprint.

[DM94a] Chongying Dong und Geoffrey Mason, *Nonabelian orbifolds and the boson-fermion correspondence*, Comm. Math. Phys. **163** (1994), 523–559.

[DM94b] Chongying Dong und Geoffrey Mason, *On Quantum Galois Theory*, preprint, hep-th/9412037 (1994).

[DM95] Chongying Dong und Geoffrey Mason, *Vertex Operator Algebras and Moonshine: A Survey*, preprint (1995).

[DMZ94] Chongying Dong, Geoffrey Mason und Yongchang Zhu, *Discrete Series of the Virasoro algebra and the Moonshine Modul*, in: Algebraic groups and their generalizations: quantum and infinite-dimensional methods (University Park, PA, 1991), Proc. Symp. Pure Math., **56**, 2, Amer. Math. Soc, Providence, 1994, pp. 295–316.

[Don93] Chongying Dong, *Vertex Algebras Associated with Even Lattices*, J. of Algebra **160** (1993), 245–265.

[Don94] Chongying Dong, *Representations of the moonshine module vertex operator algebra*, Contemp. Math. **175** (1994), 27–36.

[Don95] Chongying Dong, *Introduction to vertex operator algebras, I*, preprint, q-alg/9504017 (1995).

[DVVV89] R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde und H. Verlinde, *The Operator Algebra of Orbifold Models*, Commun. Math. Phys. **123** (1989), 485–526.

[Dyn57] E. B. Dynkin, *Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras*, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2 **6** (1957), 111–244.

[Ebe94] Wolfgang Ebeling, *Lattices and Codes, A Course Partially based on Lectures by F. Hirzebruch*, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1994.

[Elka] Noam D. Elkies, *A characterization of the $\mathbf{Z}^n$ lattice*, preprint, January 1995.

[Elkb] Noam D. Elkies, *Lattices and codes with long shadows*, preprint, February 1995.

[EZ85] Martin Eichler und Don Zagier, *The Theory of Jacobi Forms*, Progress in mathematics; Bd. 55, Birkhäuser, Boston, 1985.

[FFR91] Alex J. Feingold, Igor B. Frenkel und John F. X. Ries, *Spinor Construction of Vertex Operator Algebras, Triality, and $E_8^{(1)}$*, Contemporary Mathematics **121**, American Mathematical Society, Providence, 1991.

[FHL93] Igor B. Frenkel, Yi-Zhi Huang und James Lepowsky, *On Axiomatic Approaches to Vertex Operator Algebras and Modules*, Memoirs of the AMS, Band 104, Nr. 494, American Mathmeatical Society, Providence, 1993.

[FLM84] I.B. Frenkel, J. Lepowsky und A. Meurman, *A natural representation of the Fischer-Griess Monster with the modularfunction J as character*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **81** (1984), 3256–3260.

[FLM88] Igor Frenkel, James Lepowsky und Arne Meuerman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Academic Press, San Diego, 1988.

[Fuc92] Jürgen Fuchs, *Affine Lie Algebras and Quantum Groups*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge Univerity Press, Cambridge, 1992.

[FZ92] Igor. B. Frenkel und Yongchang Zhu, *Vertex Operator Algebras associated to Representations of Affine and Virasoro Algebras*, Duke Mathematical Journal **66** (1992), 123–168.

[GMS89] Robert L. Griess, Ulrich Meierfrankenfeld und Yoav Segev, *A uniqueness proof for the Monster*, Annals of Mathematics **130** (1989), 567–602.

[God89] Peter Goddard, *Meromorphic Conformal Field Theory*, in: Infinite Dimensional Lie Algebras and Lie Groups: Proceedings of the Conference Held at CIRM, Luminy, 1988, Adv. Ser. Math. Phys. **7**, World Scientific, Singapore, 1989, pp. 556–587.

[Gri82] R. L. Griess, *The friendly giant*, Invent. Math. **69** (1982), 1–102.

[Haa92] Rudolf Haag, *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1992.

[HBJ92] Friedrich Hirzebruch, Thomas Berger und Rainer Jung, *Manifolds and Modular Forms*, Aspects of Mathematics, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1992.

[HL93a] Yi-Zhi Huang und James Lepowsky, *A Theory of tensor products of Modules for module categories for a vertex operator algebra I*, preprint, hep-th/9309076 (1993).

[HL93b] Yi-Zhi Huang und James Lepowsky, *A Theory of tensor products of Modules for module categories for a vertex operator algebra II*, preprint, hep-th/9309159 (1993).

[HL94a] Koichiro Harada und Mong Lung Lang, *Modularforms associated with the Monster modul*, preprint (1994).

[HL94b] Yi-Zhi Huang und James Lepowsky, *Operadic formulation of the notion of vertex operator algebra*, Contemp. Math. **175** (1994), 131–147.

[HL94c] Yi-Zhi Huang und James Lepowsky, *Tensor Products of Modules for a Vertex Operator Algebra and Vertex Tensor Categories*, in: Lie Theory and Geometry, in Honor of Betram Konstant, Progress in Math., Vol. 123, Birkhäuser, Boston, 1994, pp. 349–383.

[HL95] Yi-Zhi Huang und James Lepowsky, *A Theory of tensor products of Modules for module categories for a vertex operator algebra III*, preprint, q-alg/9505018 (1995).

[Höh] Gerald Höhn, *Classification of self-dual Vertex Operator Super Algebras with Rank smaller then* 24, In Vorbereitung.

[Hö91] Gerald Höhn, *Komplexe elliptische Geschlechter und S^1-äquivariante Kobordismustheorie*, Diplomarbeit, Bonn (1991).

[Höh95] Gerald Höhn, *Self-dual Vertex Operator Superalgebras with Shadows of large minimal weight*, preprint (1995).

[Höh96] Gerald Höhn, *Self-dual Codes over the Kleinian Fourgroup*, In Vorbereitung.

[Hua91] Yi-Zhi Huang, *Geometric interpretation of vertex operator algebras*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **88** (1991), 9964–9968.

[Hua94] Yi-Zhi Huang, *A nonmeromorphic extension of the moonshine module vertex operator algebra*, preprint, hep-th/9406190 (1994).

[Hua95a] Yi-Zhi Huang, *A Theory of tensor products of Modules for module categories for a vertex operator algebra IV*, preprint, q-alg/9505019 (1995).

[Hua95b] Yi-Zhi Huang, *Introduction to vertex operator algebras, III*, preprint, q-alg/9504019 (1995).

[Iva94] A. A. Ivanov, *Presenting the Baby Monster*, Journal of Algebra **163** (1994), 88–108.

[Kac90] Victor G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3 ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Kne57] Martin Kneser, *Klassenzahlen definiter quadratische Formen*, Archiv der Mathematik **8** (1957), 241–250.

[KW94] Victor Kac und Weiqiang Wang, *Vertex Operator Superalgebras and Their Representations*, Contemp. Math. **175** (1994).

[KYY93] T. Kawai, Y. Yamada und S.-K. Yang, *Elliptic genera and $N = 2$ Superconformal Field Theory*, preprint hep-th/9306096 (1993).

[Lan88] Robert P. Langlands, *On unitary representations of the Virasoro algebra*, in: Infinite-Dimensional Lie Algebras and their Applications, (Teaneck) (Steven N. Kass, ed.), World Scientific, Teaneck, 1988, pp. 271–285.

[LcS77] Jeffrey S. Leon und Charles C. Sims, *The Existence and Uniquiness of a simple group generated by $\{3,4\}$-Transpositions*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 1039–1040.

[Lep92] J. Lepowsky, *Remarks on Vertex Operator Algebras and Moonshine*, in: Proceedings of the XXth International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics, Vol. 1, 2 (New York, 1991), World Sci. Publishing, River Edge, 1992, pp. 362–370.

[Li] Haisheng Li, *Symmetric Invariant Bilinear Forms on Vertex Operator Algebras*, preprint.

[Li94] Haisheng Li, *Representation Theory and Tensor Product Theory for Vertex Operator Algebras*, Ph.D. thesis, Rutgers University (1994).

[Li95] Haisheng Li, *Introduction to vertex operator algebras, II*, preprint, q-alg/9504018 (1995).

[Lia94] Bong H. Lian, *On the Classification of Simple Vertex Operator Algebras*, Commun. Math. Phys. **163** (1994), 307–357.

[Lien] Haisheng Li, *Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules*, J. of Pure and Appl. Alg. (zu erscheinen).

[LT89] D. Lüst und S. Theissen, *Lectures on String Theory*, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989.

[Man89] Yu. I. Manin, *Strings*, The Mathematical Intelligencer **11** (1989), 59–65.

[MH73] J. Milnor und D. Husemoller, *Symmetric Bilinear Forms*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Band 73, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[Min84] H. Minkowski, *Grundlagen für eine Theorie der quadratischen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten*, Mém. près. par divers savants á l'Acadèmie des Sci. Inst. nat. de France **29** (1884).

[Miy] Masahiko Miyamoto, *Griess Algebras and Virasoroelements in vertex operator algebras*, preprint.

[MN93] Werner Meyer und Wolfram Neutsch, *Associative Subalgebras of the Griess Algebra*, Journal of Algebra **158** (1993), 1–17.

[MOS75] C. L. Mallows, A. M. Odlyzko und N. J. A. Sloane, *Upper Bounds for Modular Forms, Lattices, and Codes*, Journal of Algebra **36** (1975), 68–76.

[MP81] W. G. McKay und J. Patera, *Table of Dimensions, Indices and Branching Rules for Representations of Simple Lie Algebras*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Band 69, Marcel Dekker, Inc., New York, 1981.

[MS73] C. L. Mallows und N. J. A. Sloane, *An upper bound for self-dual codes*, Information and Control **22** (1973), 188–200.

[MS77] F. J. MacWilliams und N. J. A. Sloane, *The Theory of Error-Correcting Codes*, Elsevier Science publishers B.V., Amsterdam, 1977.

[MS89] Gregory Moore und Nathan Seiberg, *Classical and Quantum Conformal Field Theory*, Commun. Math. Phys. **123** (1989), 177–254.

[Nie73] H.-V. Niemeier, *Definite quadratische Formen der Dimension* 24 *und Diskriminante* 1, Journal of Number Theory **5** (1973), 142–178.

[Nor82] S. P. Norton, *The uniqueness of the Monster*, in: Finite Groups Coming of Age (J. McKay, ed.), Contemp. Math. Vol. 45, Amer. Math. Soc., Providence, 1982, pp. 271–285.

[Nor87] S. P. Norton, *Generalized Moonshine*, in: Proc. Symp. Pure. Math. vol. 47, Amer. Math. Soc., Providence, 1987, pp. 208–209.

[OP44] R. E. O'Conner und G. Pall, *The construction of integral quadratic forms of determinant* 1, Duke Mathematical Journal **11** (1944), 319–331.

[PS75] V. Pless und N. J. A. Sloane, *On the Classification and Enumeration of Self-Dual Codes*, Journal of Combinatorial Theory A **18** (1975), 313–335.

[Rad73] Hans Rademacher, *Topics in Analytic Number Theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften Band 169, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[Ran77] Robert A. Rankin, *Modular Forms and Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1977.

[Ryb94] Alex J. E. Ryba, *Modular Moonshine ?*, preprint (1994).

[Sch74] B. Schoeneberg, *Elliptic Modular Functions*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften Band 203, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

[Sch92] A. N. Schellekens, *Meromorphic $c = 24$ Conformal Field Theories*, preprint, hep-th/9205072 (1992).

[Sch93] A. N. Schellekens, *Seventy Relatives of the Monster Modul*, preprint, hep-th/9304098 (1993).

[Seg88] G. Segal, *Elliptic cohomology, Séminaire Bourbaki, no. 695*, Astérisque **161–162** (1988), 187–201.

[Ser73] Jean-Pierre Serre, *A course in Arithmetic*, Graduate texts in mathematics, 7, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.

[Sie35] C. L. Siegel, *Über die analytische Theorie der quadratischen Formen*, Annals of Mathematics **36** (1935), 527–606.

[So94] Martin Schönert et al., *GAP: Groups, Algorithms and Programming*, version 3 release 4, Lehrstuhl D für Mathematik, Aachen, 1994.

[SW89] R. F. Streater und A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistic, and All That*, Advanced Book Classics, Addison-Wesley, Redwood City, 1989.

[SY89] A. N. Schellekens und S. Yankielowicz, *Curiosities at $c = 24$*, Physics Letters B **226** (1989), 285–290.

[Tam95a] Hirotaka Tamanoi, *Elliptic genera and Vertex Operator Superalgebras*, preprints (1994/1995).

[Tam95b] Hirotaka Tamanoi, *The Canonical Symmetric Invariant Pairings in Vertex Operator Superalgebras and Gramians*, preprint, IHES/M/95/14 (Februar 1995).

[Tit84] J. Tits, *On R. Griess' „Friendly giant"*, Invent. Math. **78** (1984), 491–499.

[Tsu90] H. Tsukada, *Vertex operator superalgebras*, Communications in Algebra **18** (1990), 2249–2274.

[Ver88] E. Verlinde, *Fusion Rules and Modular Transformations in 2D Conformal Field Theory*, Nuclear Physics **B300** (1988), 360–376.

[Wan93] Weiqiang Wang, *Rationality of Virasoro Vertex Operator Algebras*, International Mathematics Reseach Notices (in Duke Math. J.) **No. 7** (1993), 197–211.

[War76] Harold N. Ward, *A Restriction on the Weight Enumerator of a Self-Dual Code*, Journal of Combinatorial Theory (A) **21** (1976), 253–255.

[Wei82] Andre Weil, *Adeles and algebraic groups*, Progress in mathematics, Bd. 23, Birkhäuser, Boston, 1982.

[WW69] E. T. Whittaker und G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4 ed., Cambridge University Press, London, 1969.

[Zhu90] Yongchang Zhu, *Vertex Operator Algebras, Elliptic Functions, and Modular Forms*, Thesis, Yale University (1990).

[Zhu94] Yongchang Zhu, *Global Vertex Operators on Riemann Surfaces*, Comm. Math. Physics **165** (1994), 485–531.