

Sporadische Symmetrien und unverstandene Zusammenhänge

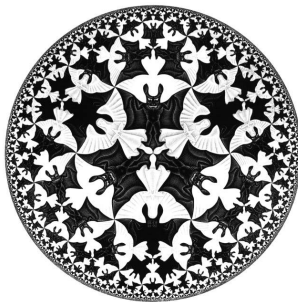
Gerald Höhn

Kansas State University und Universität Hamburg

Verabschiedung der Absolventinnen und Absolventen
Sommersemester 2009

Herman Weyl (1951) in *Symmetrie*

Wann immer man mit einer strukturbegabten Mannigfaltigkeit Σ zu tun hat, versuche man, ihre Automorphismengruppe zu ermitteln, die Gruppe derjenigen auf die Elemente der Mannigfaltigkeit bezüglichen Transformationen, die alle strukturellen Beziehungen ungeändert lassen.



M.C. Escher, Circle Limit IV (Heaven and Hell) (1960)

Ein Objekt ist *symmetrisch*, wenn es gegenüber gewissen Transformationen — seinen **Symmetrien** — invariant ist.

Die Hintereinanderausführung oder Verknüpfung zweier Symmetrien ist wieder eine Symmetrie. Betrachtet man die Menge aller Symmetrien eines Objektes, so führt dies auf den Begriff der Transformationsgruppe.

Definition

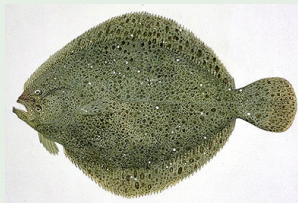
Eine **Transformationsgruppe** ist eine Menge G von umkehrbaren Abbildungen einer Menge X in sich, so daß die folgenden Axiome gelten:

- Falls g und h in G sind, so ist es auch die *Verknüpfung* $g \circ h$.
- Die *identische Abbildung* id , die jedes Element von X festläßt, ist in G enthalten.
- Mit g ist auch die *Umkehrabbildung* g^{-1} in G enthalten.

Beispiele von Transformationsgruppen

Example (Beispiele)

- 1. Beispiel: **Der Plattfisch** (*Scophthalmus rhombus*)



Symmetriegruppe $G = \{\text{id}\}$ der Ordnung 1.

Beispiele von Transformationsgruppen

Example (Beispiele)

- 2. Beispiel: **Der Seestern** (Klasse: *Asteroidea*)

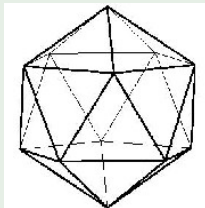


Symmetriegruppe $G = \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ der Ordnung 5.

Beispiele von Transformationsgruppen

Example (Beispiele)

- 3. Beispiel: **Das Ikosaeder**

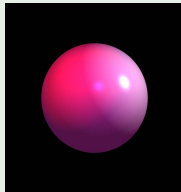


Symmetriegruppe $G = A/t_5$ der Ordnung 60.

Beispiele von Transformationsgruppen

Example (Beispiele)

- 4. Beispiel: **Die Sphäre**



Symmetriegruppe $G = SO(3)$ der Ordnung ∞ , Dimension 3.

Beispiele von Transformationsgruppen

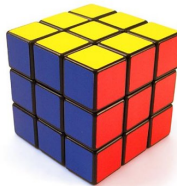
Example (Beispiele)

- 5. Beispiel: **Rubik's Cube**



Symmetriegruppe G der Ordnung
 $(3^7 \cdot 8!)(2^{11} \cdot 12!)/2 = 519.024.039.293.878.272.000$

Die Analyse der Symmetriegruppe von Rubik's Cube wird dadurch vereinfacht, dass die Menge X der $6 \times (9 - 1) = 48$ Seitenflächen sich zuerst in die Menge der $2 \times 12 = 24$ Seitenflächen der Kanten und die Menge der $3 \times 8 = 24$ Seitenflächen der Ecken zerlegen läßt und man dann auf beiden Teilmengen die *induzierte Symmetriegruppen* studieren kann.



Definition

Eine Transformationsgruppe G heißt **einfach**, falls für jede andere induzierte Transformationsgruppe H (d.h. es gibt eine Abbildung $\pi : G \longrightarrow H$ mit $\pi(g \circ h) = \pi(g) \circ \pi(h)$ für alle g und h aus G) gilt, dass entweder H gleich G ist oder H nur aus der Identität besteht.

Bemerkung: Die Einschränkung auf Transformationsgruppen ist unerheblich:

Jede Gruppe G läßt sich als Transformationsgruppe auffassen.

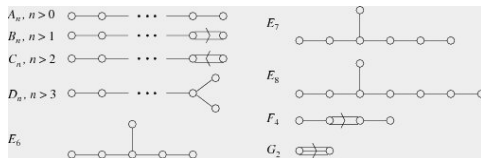
Wichtiges Problem: Klassifikation aller einfachen Gruppen.

Satz (Killing und Cartan, Ende des 19ten Jahrhunderts)

Die zusammenhängenden und kompakten kontinuierlichen (Lieschen) einfachen Gruppen bestehen aus den vier unendlichen Serien von klassischen Gruppen

- $A_1, A_2, A_3, \dots (A_n = \text{PSU}(n)),$
- $B_2, B_3, B_4, \dots (B_n = \text{SO}(2n + 1)),$
- $C_3, C_4, C_5, \dots (C_n = \text{PSP}(n)),$
- $D_4, D_5, D_6, \dots (D_n = \text{PSO}(2n)),$

und den fünf Ausnahmegruppen G_2, F_4, E_6, E_7 und E_8 .



Dynkin Diagramme:

Satz (Viele Mathematiker, Ende des 20ten Jahrhunderts)

Die endlichen einfachen Gruppen sind:

- die zyklischen Gruppen $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ von Primzahlordnung;
- die alternierenden Gruppen Alt_n vom Grad $n \geq 5$;
- die Gruppen vom Lieschen Typ: bestimmt durch das Dynkindiagramm wie im vorhergehen Satz, ggf. einer Symmetrie des Diagramms und eine Primzahlpotenz $q = p^n$;
- die folgenden 26 sporadischen Gruppen:

1.Generation: Mathieugruppen

Name	Symbol	Ordnung
Mathieugruppe	M_{11}	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$
Mathieugruppe	M_{12}	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$
Mathieugruppe	M_{22}	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
Mathieugruppe	M_{23}	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
Mathieugruppe	M_{24}	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$

Satz (Viele Mathematiker, Ende des 20ten Jahrhunderts)

Die endlichen einfachen Gruppen sind:

- *die zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ von Primzahlordnung;*
- *die alternierenden Gruppen Alt_n vom Grad $n \geq 5$;*
- *die Gruppen vom Lieschen Typ: bestimmt durch das Dynkindiagramm wie im vorhergehen Satz, ggf. einer Symmetrie des Diagramms und eine Primzahlpotenz $q = p^n$;*
- *die folgenden 26 sporadischen Gruppen:*

2. Generation: Conwaygruppen

Name	Symbol	Ordnung
Jankogruppe	J_2	$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$
Higman-Sims-Gruppe	HS	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$
McLaughlin-Gruppe	McL	$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$
Suzukigruppe	Suz	$2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
Conwaygruppe	Co_3	$2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
Conwaygruppe	Co_2	$2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
Conwaygruppe	Co_1	$2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$

Satz (Viele Mathematiker, Ende des 20ten Jahrhunderts)

Die endlichen einfachen Gruppen sind:

- *die zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ von Primzahlordnung;*
- *die alternierenden Gruppen Alt_n vom Grad $n \geq 5$;*
- *die Gruppen vom Lieschen Typ: bestimmt durch das Dynkindiagramm wie im vorhergehen Satz, ggf. einer Symmetrie des Diagramms und eine Primzahlpotenz $q = p^n$;*
- *die folgenden 26 sporadischen Gruppen:*

3. Generation: Fischergruppen

Name	Sym.	Ordnung
Heldgruppe	He	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 17$
Harada-Norton-Gr.	HN	$2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$
Thompsongruppe	Th	$2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$
Fischergruppe	Fi_{22}	$2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
Fischergruppe	Fi_{23}	$2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$
Fischergruppe	Fi_{24}	$2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29$
Babymonster	B	$2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47$
Monster	M	$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$

Satz (Viele Mathematiker, Ende des 20ten Jahrhunderts)

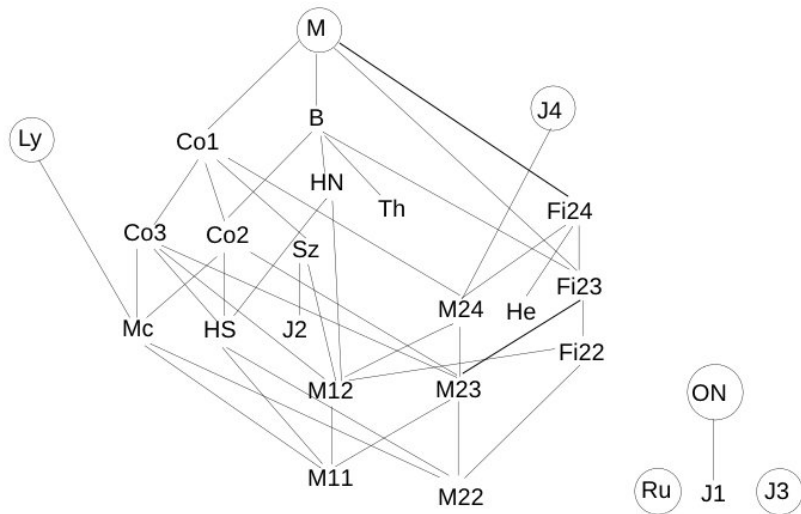
Die endlichen einfachen Gruppen sind:

- *die zyklischen Gruppen $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ von Primzahlordnung;*
- *die alternierenden Gruppen Alt_n vom Grad $n \geq 5$;*
- *die Gruppen vom Lieschen Typ: bestimmt durch das Dynkindiagramm wie im vorhergehen Satz, ggf. einer Symmetrie des Diagramms und eine Primzahlpotenz $q = p^n$;*
- *die folgenden 26 sporadischen Gruppen:*

Parias: Janko und Co.

Name	Symbol	Ordnung
Jankogruppe	J_1	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$
Jankogruppe	J_3	$2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$
Rudvalisgruppe	Ru	$2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$
O'Nangruppe	ON	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 31$
Lyonsgruppe	Ly	$2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$
Jankogruppe	J_4	$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$

Beziehungen zwischen sporadischen Gruppen

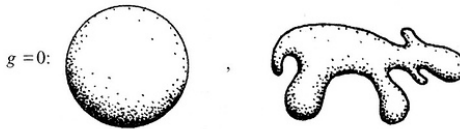


Problem: Finde für jede einfache Gruppe G ein natürliches Objekt X dessen Symmetrien gerade die Gruppe G sind.

Für die unendlichen Serien von endlichen einfachen Gruppen und die sporadischen Mathieu-, Conway- und Fischergruppen ist dies gelungen. Für die 6 Parias fehlt bisher eine solche Beschreibung.

Satz (Klassifikation der 2-dimensionalen Flächen)

Die geschlossenen orientierten Flächen sind bis auf Deformationsäquivalenz durch ihr **Geschlecht** g bestimmt. Die mögliche Werte für das Geschlecht sind $g = 0, 1, 2, 3, \dots$



Satz (Hurwitz, 1893)

Für eine endliche Gruppe G , die auf einer Fläche Σ vom Geschlecht $g \geq 2$ durch orientierungserhaltene Symmetrien operiert gilt

$$|G| \leq 84(g - 1).$$

Beweisskizze:

Satz (Hurwitz, 1893)

Für eine endliche Gruppe G , die auf einer Fläche Σ vom Geschlecht $g \geq 2$ durch orientierungserhaltene Symmetrien operiert gilt

$$|G| \leq 84(g - 1).$$

Beweisskizze:

- Der Quotient Σ/G ist wieder eine geschlossene Fläche:

Satz (Hurwitz, 1893)

Für eine endliche Gruppe G , die auf einer Fläche Σ vom Geschlecht $g \geq 2$ durch orientierungserhaltene Symmetrien operiert gilt

$$|G| \leq 84(g - 1).$$

Beweisskizze:

- Der Quotient Σ/G ist wieder eine geschlossene Fläche:
- Man setze $R = \sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{e_i})$, wobei $e_i \geq 2$ ganz. Dann ist

$$2g(\Sigma) - 2 = |G| \cdot (2g(\Sigma/G) - 2 + R).$$

Satz (Hurwitz, 1893)

Für eine endliche Gruppe G , die auf einer Fläche Σ vom Geschlecht $g \geq 2$ durch orientierungserhaltene Symmetrien operiert gilt

$$|G| \leq 84(g - 1).$$

Beweisskizze:

- Der Quotient Σ/G ist wieder eine geschlossene Fläche:
- Man setze $R = \sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{e_i})$, wobei $e_i \geq 2$ ganz. Dann ist

$$2g(\Sigma) - 2 = |G| \cdot (2g(\Sigma/G) - 2 + R).$$

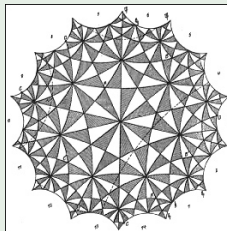
- $R \geq (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{3}) + (1 - \frac{1}{7}) = 2 + \frac{1}{42}$ falls $R > 2$.

Example (Kleinsche Quartik)

Es sei $g = 3$. Dann ist $|G| = 84 \cdot (g - 1) = 168$ realisierbar:
 $SL_2(\mathbf{R})$ operiert vermöge Möbiustransformationen auf der oberen Halbebene $\mathbf{H}$ der komplexen Zahlen. Es sei

$$\Gamma(N) = \left\{ A \in SL_2(\mathbf{Z}) \mid A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}.$$

Dann ist der Abschluss $\overline{\Gamma(7) \backslash \mathbf{H}}$ eine Fläche vom Geschlecht 3 mit Symmetriegruppe $G = SL_2(\mathbf{Z})/\Gamma(7) = PSL_2(\mathbf{F}_7)$ der Ordnung 168.



Allgemeiner gilt, dass die meisten einfachen Gruppen G als Automorphismengruppen von Flächen vom Geschlecht g mit $|G| = 84(g - 1)$ realisiert werden können.

Insbesondere gilt dies für das Monster (*Wilson* 2001). Die Konstruktion ist allerdings etwas unnatürlich, da die Gruppe G selbst in der Konstruktion verwendet wird in dem man zeigt, dass G sich als Quotient der Dreiecksgruppe

$$T_{2,3,7} = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^7 = 1 \rangle$$

realisieren läßt.

Ogg und Monster

Die Gruppe $\Gamma(N)$ kann zur etwas größeren Gruppe $\Gamma(N)^+ = \text{Normalisator}_{\text{SL}_2(\mathbf{R})}(\Gamma(N))$ erweitert werden, die ebenfalls auf der oberen Halbebene operiert.

Mysterium (Ogg 1974)

Es sei p eine Primzahl. Dann hat die Fläche $\overline{\Gamma(p)^+ \backslash \mathbf{H}}$ genau dann das Geschlecht 0 falls p die Ordnung der größten sporadischen Gruppe — dem Monster — teilt, also $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59, 71\}$ gilt.

Für eine Erklärung dieses Zusammenhanges setzte er eine Flasche *Jack Daniel's* aus. Diese und weiteren Beobachtungen sind unter dem Namen **Monstrous Moonshine** bekannt.

Arbeiten von *Borcherds (1992)* in Verbindung mit Arbeiten von *Frenkel, Lepowsky, Meurmann* und *Cummins, Gannon* ergeben eine Erklärung für eine Richtung des Zusammenhanges:

Satz (Borcherds)

Es sei p eine Primzahl, die die Ordnung des Monsters teilt, dann gibt es einen natürlichen Grund dafür dass die Fläche $\overline{\Gamma(p)^+} \backslash \mathbf{H}$ das Geschlecht 0 hat.

Idee:

Arbeiten von *Borcherds (1992)* in Verbindung mit Arbeiten von *Frenkel, Lepowsky, Meurmann* und *Cummins, Gannon* ergeben eine Erklärung für eine Richtung des Zusammenhanges:

Satz (Borcherds)

Es sei p eine Primzahl, die die Ordnung des Monsters teilt, dann gibt es einen natürlichen Grund dafür dass die Fläche $\overline{\Gamma(p)^+ \backslash \mathbf{H}}$ das Geschlecht 0 hat.

Idee:

- Es gibt eine *Vertexoperatoralgebra* (= chirale Algebra einer zweidimensionalen konformen Quantenfeldtheorie) $V^\natural$ der zentralen Ladung 24, die das Monster als Symmetriegruppe besitzt (Borcherds, Frenkel/Lepowsky/Meurmann).

- Es reicht zu zeigen, dass für ein Element g des Monsters die *Thompson-McKay* Reihe $T_g = q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \text{tr}(g|V_n^{\natural}) q^n$, $q = e^{2\pi i \tau}$, eine Funktion in der oberen Halbebene definiert, die invariant unter einer Modulgruppe $\Gamma_g \subset \text{SL}_2(\mathbf{R})$ ist, mit der Eigenschaft dass $\overline{\Gamma_g \backslash \mathbf{H}}$ eine Fläche vom Geschlecht 0 ist. Unglücklicherweise kann man aber T_g im allgemeinen nicht direkt berechnen.

- Es reicht zu zeigen, dass für ein Element g des Monsters die *Thompson-McKay* Reihe $T_g = q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \text{tr}(g|V_n^{\natural}) q^n$, $q = e^{2\pi i \tau}$, eine Funktion in der oberen Halbebene definiert, die invariant unter einer Modulgruppe $\Gamma_g \subset \text{SL}_2(\mathbf{R})$ ist, mit der Eigenschaft dass $\overline{\Gamma_g} \backslash \mathbf{H}$ eine Fläche vom Geschlecht 0 ist. Unglücklicherweise kann man aber T_g im allgemeinen nicht direkt berechnen.
- Aus der Vertexoperatoralgebra $V^{\natural} \otimes V_{\mathbb{H}_{1,1}}$ läßt sich eine *verallgemeinerte Kac-Moody Liealgebra* (= bosonische Stringtheorie) $\mathfrak{g}^{\natural}$ konstruieren, die das Gitter $\mathbb{H}_{1,1}$ als Wurzelgitter besitzt und auf der das Monster durch äußere Automorphismen operiert. Die äquivariante Nenneridentität liefert gewisse Rekursionsformeln zwischen den Koeffizienten der T_g : Die Funktionen T_g sind *vollständig replizierbar* (Borcherds).

- Vollständig replizierbare Funktionen sind invariant unter Modulgruppen Γ mit $\overline{\Gamma \backslash \mathbf{H}}$ vom Geschlecht 0 (Cummins/Gannon).

Borcherds erhielt für seine Beiträge 1998 die Fields-Medaille. Die Flasche Jack Daniel's ist für die Rückrichtung immer noch erhältlich.



Mukai und die M_{23}

Die Riemansche Fläche $\overline{\Gamma(7)} \backslash \mathbf{H}$ kann auch als *algebraische Kurve*

$$\{(X : Y : Z) \mid X^3Y + Y^3Z + Z^3X = 0\} \subset \mathbf{CP}_2$$

beschrieben werden.

Betrachtet man die Gleichung

$$\{(X : Y : Z : T) \mid X^3Y + Y^3Z + Z^3X + T^4 = 0\} \subset \mathbf{CP}_3$$

erhält man eine *algebraische Fläche*, welche topologisch eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

In höherer Dimensionen ist die Situation viel komplizierter als in Dimension 2: Es muß sorgfältig zwischen *topologischen*, *differenzierbaren*, *komplexen*, *symplektischen*, *Riemannschen*, *Kählerschen* und *algebraischen* Strukturen unterschieden werden.

Definition

Eine K3-Fläche (benannt nach Kummer, Kähler und Kodaira) ist eine 4-dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit, die diffeomorph zur Fläche $X^3Y + Y^3Z + Z^3X + T^4 = 0$ ist.



Jede K3-Fläche besitzt eine symplektische Struktur.

Satz (Mukai 1988)

Es sei G die symplektische Symmetriegruppe einer K3-Fläche. Dann ist G enthalten in einer von 11 Gruppen, die durch die folgenden Beispiele realisiert sind:

Gruppe	Ordnung	K3-Fläche
$\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$	168	$X^3Y + Y^3Z + Z^3X + T^4 = 0$ in $\mathbf{CP}_3$
Alt_6	360	$\sum_1^6 X_i = \sum_1^6 X_i^2 = \sum_1^6 X_i^3 = 0$ in $\mathbf{CP}_5$
S_5	120	$\sum_1^5 X_i = \sum_1^5 X_i^2 = \sum_1^5 X_i^3 = 0$ in $\mathbf{CP}_5$
$2^4.\mathrm{Alt}_5$	960	$X^4 + Y^4 + Z^4 + T^4 + 12XYZT = 0$ in $\mathbf{CP}_3$
$4^2.S_4$	384	$X^4 + Y^4 + Z^4 + T^4 = 0$ in $\mathbf{CP}_3$
$2^4.\mathrm{Alt}_{3,3}$	288	$X^2 + \omega^j Y^2 + \omega^{2j} Z^2 = \sqrt{3} T_j^2, j = 0, 1, 2,$ in $\mathbf{CP}_5$
$(Q_8 * Q_8).S_3$	192	$X^4 + Y^4 + Z^4 + T^4 - 2\sqrt{-3}(X^2Y^2 + Z^2T^2)$ in $\mathbf{CP}_3$
$2^4.\mathrm{Dih}_{12}$	192	$\begin{cases} X_1^2 + X_3^2 + X_5^2 = X_2^2 + X_4^2 + X_6^2 \\ X_1^2 + X_4^2 = X_2^2 + X_5^2 = X_3^2 + X_6^2 \end{cases}$ in $\mathbf{CP}_5$
$3^2.\mathrm{Dih}_8$	72	$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3 = X_1X_2 + X_3X_4 + X_5^2 = 0$ in $\mathbf{CP}_4$
$3^2.Q_8$	72	Doppelte Überlagerung des $\mathbf{CP}_2$ verzweigt über $X^6 + Y^6 + Z^6 - 10(X^3Y^3 + Y^3Z^3 + Z^3X^3) = 0$
$Q_8.S_3$	48	Doppelte Überlagerung des $\mathbf{CP}_2$ verzweigt über $XY(X^4 + Y^4) + Z^6 = 0$

Mysterium (Mukai)

Die 11 Gruppen aus dem vorhergehenden Satz sind genau die 11 maximalen Untergruppen der sporadischen Gruppe M_{23} , welche in der definierenden Permutationsdarstellung von M_{23} auf der Menge $\{1, 2, \dots, 24\}$ genau 5 Bahnen besitzen.

Dieser Zusammenhang ist im wesentlichen verstanden:

Satz (Kondo 1998)

Falls G symplektische Symmetriegruppe einer K3-Fläche ist, dann läßt sich G in gewisse Untergruppen der äußeren Automorphismengruppe des unimodularen Gitters $\Pi_{25,1}$ einbetten.

Satz (Mukai 1998)

Für eine Untergruppe G der M_{23} wie oben kann man direkt eine K3-Fläche mit G als symplektische Symmetriegruppe konstruieren.

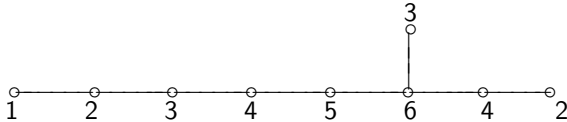
Die Symmetriegruppe $\text{Aut}(II_{25,1})$ ist eine Erweiterung der Conwaygruppe Co_1 durch eine unendliche Spiegelungsgruppe und auch die Symmetriegruppe einer wie im vorhergehenden Abschnitt betrachteten bosonischen Stringtheorie. Ob ein direkter Zusammenhang zu $K3$ -Flächen besteht ist unklar.

Chen und Kwasik beweisen in einem Preprint (2007) das Analogon von Mukais Resultat für **symplektische 4-Mannigfaltigkeiten**. Hierbei spielen Seiberg-Witten Invarianten — definiert durch eine $N=2$ -supersymmetrische Yang-Mills Eichtheorie — eine fundamentale Rolle. Der Beweis folgt Xiao (1996) und liefert keine direkte Erklärung des Zusammenhanges mit M_{23} .

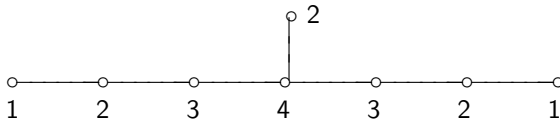
McKay und Fi_{24} , B und das Monster

Die affinen Diagramme $\tilde{E}_8$, $\tilde{E}_7$ und $\tilde{E}_6$:

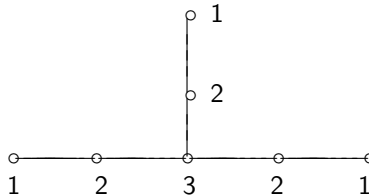
$\tilde{E}_8$:



$\tilde{E}_7$:



$\tilde{E}_6$:

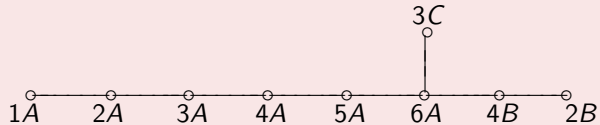


Satz (Gruppentheorie)

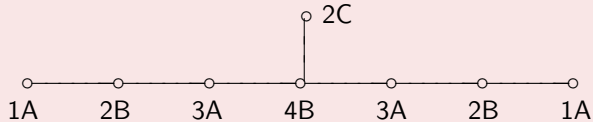
- *Das Produkt zweier Involutionen vom Typ 2A im Monster ist ein Element vom Typ 1A, 2A, 3A, 4A, 5A, 6A, 4B, 2C oder 3C.*
- *Das Produkt zweier Involutionen vom Typ 2A im Babymonster ist ein Element vom Typ 1A, 2B, 3A, 4B oder 2C.*
- *Das Produkt zweier Involutionen vom Typ 2C in der Fischergruppe Fi_{24} ist ein Element vom Typ 1A, 2A oder 3A.*

Mysterium (McKay 1980)

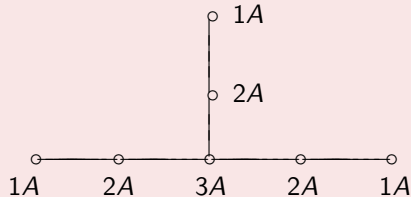
$\tilde{E}_8$:



$\tilde{E}_7$:



$\tilde{E}_6$:



Satz (Lam, Yamauchi, Miamoto (E_8 , 2005–2007) und
Höhn, Lam, Yamauchi (E_7 , E_6 , 2009))

Es gibt eine halbwegs natürliche Abbildung, die einer Ecke des affinen Dynkindiagramms $\tilde{E}_8$, $\tilde{E}_7$ bzw. $\tilde{E}_6$ das entsprechende Gruppenelement des Monsters, des Babymonsters bzw. der Fischergruppe Fi_{24} zuordnet.

Idee:

Satz (Lam, Yamauchi, Miamoto (E_8 , 2005–2007) und
Höhn, Lam, Yamauchi (E_7 , E_6 , 2009))

Es gibt eine halbwegs natürliche Abbildung, die einer Ecke des affinen Dynkindiagramms $\tilde{E}_8$, $\tilde{E}_7$ bzw. $\tilde{E}_6$ das entsprechende Gruppenelement des Monsters, des Babymonsters bzw. der Fischergruppe Fi_{24} zuordnet.

Idee:

- Es gibt Vertexoperatoralgebren $V^\natural$, $WB^\natural$ und $WF^\natural$ mit $\text{Aut}(V^\natural) = M$ [F.L.M. 1988], $\text{Aut}(WB^\natural) = B$ [H. 2000] und $\text{Aut}(WF^\natural) \subset \text{Fi}_{24}$ [H.L.Y. 2009].

- Einer Ecke nX des Dynkin Diagramms E_i läßt sich eine "Dieder-VOA" $V_{E_i}(nX)$ mit Symmetrie der Ordnung n zuordnen.

- Einer Ecke nX des Dynkin Diagramms E_i läßt sich eine “Dieder-VOA“ $V_{E_i}(nX)$ mit Symmetrie der Ordnung n zuordnen.
- Die Dieder-VOAs $V_{E_i}(nX)$ lassen sich für $i = 8, 7$ bzw. 6 in $V^\natural$, $WB^\natural$ bzw. $WF^\natural$ einbetten und liefern dort einen Automorphismus vom Typ nX .
Für E_8 werden hierzu die Tiefe-Löcher-Konstruktionen des Leechgitters verwendet. Für E_7 und E_6 betrachtet wir die von E_8 bzw. $V^\natural$ induzierten Strukturen.

- Einer Ecke nX des Dynkin Diagramms E_i läßt sich eine “Dieder-VOA“ $V_{E_i}(nX)$ mit Symmetrie der Ordnung n zuordnen.
- Die Dieder-VOAs $V_{E_i}(nX)$ lassen sich für $i = 8, 7$ bzw. 6 in $V^\natural$, $WB^\natural$ bzw. $WF^\natural$ einbetten und liefern dort einen Automorphismus vom Typ nX .
Für E_8 werden hierzu die Tiefe-Löcher-Konstruktionen des Leechgitters verwendet. Für E_7 und E_6 betrachtet wir die von E_8 bzw. $V^\natural$ induzierten Strukturen.

Warum diese Abbildung tatsächlich surjektiv ist, bleibt unklar. Allerdings hat Sakuma mit VOA-theoretischen Methoden gezeigt, dass es nur 9 verschiedene Dieder-VOAs in $V^\natural$ geben kann. Für $WB^\natural$ und $WF^\natural$ erhalten wir zumindest eine Abschätzung für die Ordnung des Produktes der Involutionen.

